Capítulo 4

ELEMENTOS DE MECÁNICA LAGRANGIANA

4.1. Introducción

Hasta ahora, hemos basado la discusión del movimiento fundamentalmente en conceptos vectoriales como fuerza, aceleración, velocidad, etc. Sin embargo, es posible analizar todos estos fenómenos dentro de un formalismo que se basa en funciones escalares de la energía. Este enfoque corresponde a la llamada Mecánica Analítica desarrollada por Joseph L.Lagrange (1736-1813) en su tratado *Méchanique Analytique* en 1788.

Nos limitaremos a presentar el formalismo de Lagrange y algunas de sus aplicaciones, dejando de lado la formulación variacional de Hamilton y otros temas que si bien son importantes, no corresponden a los objetivos de este curso.

4.2. Grados de Libertad

Supongamos un sistema formado por N partículas. Si su movimiento no tiene restricciones, la posición de las N partículas quedará determinada por 3N coordenadas independientes elegidas en forma conveniente. Este conjunto $\vec{g} = \{g_1, g_2, \ldots, g_{3N}\}$ de variables independientes que determina en forma única la configuración del sistema, es el conjunto de las *coordenadas genera-*

lizadas del sistema.

Muchas veces el desplazamiento de las partículas está restringido. Por ejemplo, puede darse el caso en que varias de las partículas del sistema estén obligadas a moverse en contacto con una superficie o una curva dada; o bien, el movimiento del sistema puede estar confinado a un volumen determinado del espacio; o un sólido puede estar obligado a rodar sin resbalar, etc. Cuando las restricciones se pueden expresar mediante ecuaciones algebraicas entre las coordenadas del tipo

$$\phi_i(\vec{g}, t) = 0,$$

o dan lugar a expresiones diferenciales de la forma

$$\sum_j A_{ji}(\vec{g}, t)\, dg_j + A_0(\vec{g}, t)\, dt = 0$$

que representan diferenciales exactas o que pueden hacerse exactas al multiplicarlas por funciones de $\vec{g}$ y t, se dice que las restricciones son *holónomas*. Las restricciones se ejercen a través de las llamadas *fuerzas de restricción o de ligadura*, correspondiendo una fuerza de ligadura a cada ecuación de restricción. Si existen R ecuaciones de restricción holónomas, sólo $l = 3N - R$ de las $3N$ coordenadas son independientes. El número de coordenadas independientes que en conjunto con las ecuaciones de restricción determinan en forma única la configuración del sistema se llama *número de grados de libertad* del sistema holónomo. Por ejemplo, una partícula obligada a recorrer una curva dada tiene un grado de libertad; si está obligada a moverse en contacto con una superficie, tiene dos grados de libertad; y tiene tres, si puede moverse libremente. Un sólido indeformable con libertad de movimiento, tiene seis grados de libertad, los que resultan de la invariabilidad de la distancia entre sus partículas; si posee un punto fijo, sólo tiene tres grados de libertad (en el caso del trompo con púa fija, se pueden elegir los ángulos de Euler como tres coordenadas generalizadas independientes), etc.

Cuando sólo l de las $3N$ coordenadas del conjunto $\vec{g}$ son independientes, se eligen arbitrariamente l cualesquiera de ellas como coordenadas independientes y se designan como *coordenadas generalizadas del sistema holónomo* representándolas por el conjunto $\vec{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}$.

La posición de una partícula puede representarse por un punto en un espacio de 3 dimensiones. Análogamente, podemos representar por un punto la configuración del sistema de N partículas libres en un espacio de $3N$ dimensiones llamado *espacio de configuración*. Si el sistema sólo tiene l grados

de libertad, el *espacio de configuración del sistema holónomo* tendrá l dimensiones correspondiente al conjunto de las l coordenadas generalizadas independientes $\vec{q}$.

4.3. Trabajo Virtual

Los conceptos de *desplazamiento virtual* y de *trabajo virtual* se han mostrado de gran utilidad en el desarrollo de la mecánica. Se define como desplazamiento virtual un desplazamiento infinitesimal distinto de cero, arbitrario y ficticio, no relacionado con el movimiento real que pueda tener el sistema, durante el cual las fuerzas y el tiempo no varán. Para no confundir un desplazamiento real $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$, con un desplazamiento virtual, a este último se le representa por $\delta\vec{r}$. Si el punto de aplicación de una fuerza $\overrightarrow{F}$ experimenta un desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$, se dice que la fuerza realiza un *trabajo virtual*

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \delta\vec{r}$$

Si el desplazamiento virtual *respeta* las ligaduras que suponemos sin roce, las fuerzas de ligadura no trabajan. Por ejemplo, imaginemos que una partícula está obligada a recorrer un superficie lisa; la fuerza de restricción será la reacción normal, y cualquier desplazamiento virtual que respete las ligaduras deberá ser tangente a la superficie; por lo tanto, el trabajo virtual δW será nulo ya que la fuerza de restricción y el desplazamiento virtual son ortogonales. De ahora en adelante, sólo consideraremos *fuerzas de ligadura sin roce que no trabajan si los desplazamientos virtuales no violan las ligaduras*.

4.4. Componentes de la Fuerza Generalizada

Consideremos un sistema de N partículas sin restricciones cuya configuración queda determinada por las coordenadas cartesianas $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{3N}\}$ y también, por las coordenadas generalizadas $\{\vec{g} = g_1, g_2, \ldots, g_{3N}\}$. Las componentes cartesianas de la fuerza aplicada son $\overrightarrow{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_{3N}\}$, las que en un desplazamiento virtual realizan un trabajo virtual $\delta W = \sum F_j\,\delta x_j$. Se definen como *componentes de la fuerza generalizada* al conjunto de funciones $\{\overrightarrow{G} = G_1, G_2, \ldots, G_{3N}\}$ que satisfacen el requisito de que el trabajo

virtual de las fuerzas aplicadas sea igual a $\sum G_i\,\delta g_i$. O sea,

$$\boxed{\delta W = \sum_i^{3N} G_i\,\delta g_i.} \tag{4.1}$$

Nótese que las dimensiones de G_i no son necesariamente las de una fuerza; si las dimensiones de δg_i son las de un ángulo, entonces las de G_i serán las de un torque.

Como el sistema no tiene restricciones, las $3N$ coordenadas son independientes y las componentes generalizadas de la fuerza quedan determinadas en forma única. Para calcular G_i basta elegir un desplazamiento virtual que haga variar sólo g_i ; entonces G_i se obtendrá dividiendo el trabajo virtual por el desplazamiento virtual:

$$G_i = \frac{\delta W}{\delta g_i}$$

donde δW es el trabajo virtual realizado por la fuerza aplicada.

Si el sistema no es libre y existen R ecuaciones de ligadura holónomas y $l = 3N-R$ grados de libertad, sólo l de las $3N$ coordenadas $\vec{g}$ son independientes. Sin embargo, si llamamos $\vec{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}$ al conjunto de l coordenadas generalizadas independientes, podemos definir sin ambigüedad al conjunto de l funciones $\overrightarrow{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_l\}$ como las componentes generalizadas de la fuerza, si *elegimos desplazamientos virtuales , sin roce y que respeten las ligaduras*. De este modo, podremos escribir

$$\boxed{\delta W = \sum_i^{l} Q_i\,\delta q_i.} \tag{4.2}$$

Como en un desplazamiento virtual sin roce que respeta las ligaduras, las fuerzas de restricción no realizan trabajo, δW representa sólo el trabajo virtual de la fuerza aplicada. Por lo tanto, las componentes generalizadas definidas por la Ec. 4.2 están asociadas exclusivamente a la fuerza aplicada. Luego, *la componente generalizada de una fuerza de ligadura es nula.*

De ahora en adelante, sólo consideraremos sistemas holónomos e imaginaremos desplazamientos virtuales que respetan las restricciones que suponemos sin roce.

Analicemos entonces un sistema de N partículas con l grados de libertad, sobre el que actúa la fuerza aplicada $\overrightarrow{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_{3N}\}$, expresada a través de sus componentes cartesianas. La configuración del sistema la suponemos descrita por las coordenadas cartesianas $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{3N}\}$ y también por las coordenadas generalizadas $\vec{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}$. Finalmente, suponemos conocida las ecuaciones de transformación de cooordenadas

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_l, t) \equiv x_i(\vec{q}, t), \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, 3N.$$

Para encontrar Q_i tenemos dos caminos:

- imaginar un desplazamiento virtual que sólo haga variar q_i de modo que la componente Q_i de la fuerza generalizada será igual a $\delta W/\delta q_i$, como indicáramos anteriormente;
- o podemos expresar Q_i en función de las componentes cartesianas de la fuerza aplicada, como demostramos a continuación.

De la ecuación de transformación de coordenadas calculamos

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial x_j}{\partial t}\delta t.$$

Sin embargo, el último término es nulo, pues δt es nulo ya que por definición el tiempo no varía en un desplazamiento virtual. Luego,

$$\delta x_i = \sum_j^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Reemplazando en la expresión del trabajo virtual, se obtiene

$$\delta W = \sum_i^{3N} F_i \delta x_i = \sum_i^{3N} F_i \sum_j^l \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j^l \sum_i^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Comparando directamente con la Ec. 4.2 que define las componentes de la fuerza generalizada, y puesto que los q_k son independientes y arbitrarios

$$\sum_j Q_j \delta q_j = \sum_j \Big(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\Big)\delta q_j,$$

obtenemos que

$$\boxed{Q_j = \sum_i^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j},} \tag{4.3}$$

que es la expresión que buscábamos.

4.5. Las ecuaciones de Lagrange

A partir de las ecuaciones de transformación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas generalizadas

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_l)$$

calculemos la derivada de x_i respecto del tiempo

$$\frac{dx_i}{dt} \equiv \dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv \dot{x}_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t). \tag{4.4}$$

La derivada parcial de $\dot{x}_i$ respecto de $\dot{q}_j$ se obtiene de inmediato

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \tag{4.5}$$

Ahora, calculemos

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\, \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\, \partial t}.$$

Si cambiamos el orden de las derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Pero, $\partial x_i/\partial q_j$ es función de $\vec{q}$ y t solamente, por lo que el segundo miembro de la expresión anterior no es otra cosa que el desarrollo de $(d/dt)(\partial x_i/\partial q_j)$. Luego,

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \tag{4.6}$$

Por otra parte, de la componente i^{ma} de la II Ley de Newton obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_i) = F_i + F_i^{lig},$$

donde F_i representa la componente cartesiana respectiva de la fuerza aplicada. De la expresión de la energ'ıa cinética

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{x}_i^2$$

obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i\dot{x}_i,$$

y reemplazando en la ecuación del movimiento resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = F_i + F_i^{lig}.$$

Si multiplicamos por $\partial x_i/\partial q_j$ y sumamos sobre i se tiene

$$\sum_i \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\right\}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_i F_i^{lig}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

En el segundo miembro, de acuerdo con la Ec. 4.3, la primera sumatoria representa la componente generalizada Q_j de la fuerza aplicada; la segunda sumatoria representa la componente j de la fuerza de ligadura generalizada y que es nula según lo discutido en la sección 4.4. Por lo tanto, la relación anterior se reduce a

$$\sum_i \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)\right\}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j. \tag{4.7}$$

Teniendo presente que

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt},$$

transformamos el primer miembro de Ec. 4.7, con lo que resulta

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = Q_j.$$

Si reemplazamos las ecuaciones 4.5 y 4.6 en la anterior, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = Q_j,$$

que es lo mismo que

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_j} = Q_j.} \tag{4.8}$$

La relación anterior representa un sistema de l ecuaciones diferenciales de segundo orden para un sistema holónomo con l grados de libertad que se conocen como *ecuaciones del movimiento de Lagrange*.

Supongamos ahora, que las fuerzas aplicadas son conservativas y derivan de un potencial $V = V(\vec{x},t)$ que no depende de las velocidades , de modo que

$$F_i = -\frac{\partial V(\vec{x},t)}{\partial x_i}.$$

Entonces, la componente Q_j de la fuerza generalizada, de acuerdo con la Ec. 4.3, será

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \\ Q_j &= -\frac{\partial V(\vec{q},t)}{\partial q_j}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para este sistema se define una función escalar de la energía llamada *función de Lagrange o Lagrangiano* L, de la siguiente manera

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) - V(\vec{q},t), \tag{4.10}$$

de modo que podemos expresar las Ecuaciones de Lagrange en función del Lagrangiano. Puesto que $V(\vec{q},t)$ no depende de las velocidades $\dot{\vec{q}}$, se cumple que

$$\frac{\partial V(\vec{q},t)}{\partial \dot{q}_j} = 0.$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange, Ec. 4.8, y teniendo presente la Ec. 4.9, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0,$$

o sea,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_j} = 0.} \tag{4.11}$$

Esta segunda forma de las ecuaciones de Lagrange es aplicable sólo a sistemas holónomos, cuyas fuerzas derivan de un potencial que no depende de las velocidades.

4.6. Constantes del Movimiento

Se llama constante del movimiento cualquier función $\phi(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ que se mantiene invariable durante el movimiento del sistema.

4.6.1. El Momentum Generalizado Conjugado

Si el Lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada generalizada q_j, se dice que esta coordenada es *cíclica* o *ignorable*, y del Lagrangiano se dice que es *cíclico* en q_j. En este caso, entonces

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

y de la ecuación de Lagrange, Ec 4.11, se tiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = constante.$$

Se define el *momentum generalizado conjugado* p_j de la coordenada generalizada q_j como

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.} \tag{4.12}$$

De acuerdo con lo anterior, hemos encontrado que *si el Lagrangiano es cíclico en algunas de las coordenadas, los momenta conjugados respectivos son constantes del movimiento.*

4.6.2. La Función de Hamilton

Otra función escalar de la energía que en ciertas condiciones se conserva, y que juega un papel muy importante en el desarrollo de la Física, es la *función de Hamilton* o *Hamiltoniano* H que se define de la siguiente manera:

$$\boxed{H = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L,} \tag{4.13}$$

o bien

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L. \tag{4.14}$$

Estudiemos la variación respecto del tiempo del Hamiltoniano. De la Ec. 4.13 obtenemos

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \frac{dL}{dt}.$$

Pero, $L = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$, por lo que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Reemplazando esta ecuación en la anterior resulta

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t},$$

y como las cantidades entre paréntesis son las ecuaciones de Lagrange, tenemos finalmente

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.15}$$

En consecuencia, *si el Lagrangiano L no es una función explícita del tiempo, el Hamiltoniano es una constante del movimiento.*

Si la energía cinética es una función cuadrática homogénea[1] de las velocidades generalizadas—lo que ocurre cuando las ecuaciones de transformación de coordenadas no dependen explícitamente del tiempo—el Hamiltoniano es igual a la Energía Mecánica Total. En efecto,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2,$$

y si las ecuaciones de transformación de coordenadas no dependen del tiempo, o sea, si

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_l),$$

al derivar obtenemos

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j,$$

lo que al substituir en T nos da

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \Big(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\Big)\Big(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\Big).$$

Finalmente, reordenando podemos escribir

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_j \sum_k m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,} \tag{4.16}$$

donde las m_{jk} son funciones de $\vec{q}$ definidascomo sigue

$$m_{jk}(\vec{q}) = m_{kj}(\vec{q}) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

[1] Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ es homogénea de grado n en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, donde $r \leq s$, cuando

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_r, x_{r+1}, \ldots, x_s) = \lambda^n f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

para todo $\lambda > 0$.

La expresión 4.16 muestra que la energía cinética es una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas.

Como V no es función explícita de $\dot{\vec{q}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

por lo que el Hamiltoniano lo escribimos como sigue

$$H = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + V.$$

Derivando parcialmente la Ec. 4.16

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{1}{2}\sum_k m_{ik}\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_j m_{ji}\dot{q}_j \\ &= \sum_j m_{ji}\dot{q}_j, \end{aligned}$$

y reemplazando en la función de Hamilton encontramos

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \sum_j m_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i - T + V \\ H &= 2T - T + V \\ H &= T + V. \end{aligned}$$

En resumen, *el Hamiltoniano es igual a la energía mecánica total cuando la energía cinética es una función cuadrática, homogénea de las velocidades generalizadas, y que se conserva si el Lagrangiano no es una función explícita del tiempo.*

4.7. Principio de Hamilton

Un problema clásico de matemáticas es el cálculo de variaciones. Se trata de encontrar la trayectoria $y(x)$ entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para la cual tiene un valor extremo (o estacionario) la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)\, dx,$$

donde $y' \equiv dy/dx$. Se encuentra que para que esto se cumpla, la función conocida $f(y, y'; x)$ debe satisfacer la siguiente condición diferencial

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f(y,y';x)}{\partial y'} - \frac{\partial f(y,y';x)}{\partial y} = 0,$$

conocida como ecuación de Euler–Lagrange, de cuya integración es posible obtener $y(x)$.

Se puede extender el resultado anterior al caso en que f es función de n variables $y_i(x)$. Ahora, las condiciones que debe satisfacer la función

$$f = f(y_1, y_1'; y_2, y_2'; \ldots; x) \equiv f(\vec{y}, \vec{y}'; x)$$

son las siguientes

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.17}$$

Esto representa un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden que se conocen bajo el nombre de *ecuaciones de Euler*. Si en este sistema, reeplazamos f por L, y_i por q_i, y_i' por $\dot{q}_i$ y x por t, reencontramos las ecuaciones de Lagrange. La conclusión inmediata es que la función de Lagrange satisface las condiciones para que la integral de acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q},\dot{\vec{q}}, t)\, dt \tag{4.18}$$

tenga un valor estacionario. W.R.Hamilton desarrolla estas ideas en 1834 y las sintetiza como el postulado fundamental de la mecánica clásica: *de todas las trayectorias posibles que puede recorrer un sistema al moverse entre dos puntos en el espacio de configuración, la naturaleza elige aquella que hace estacionaria la integral*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt.$$

Este enunciado que se conoce como el *Principio de Hamilton*, contiene la misma información que las Leyes de Newton. Sin embargo, dada su generalidad e independencia del concepto de fuerza, ha sido posible aplicarlo a sistemas no mecánicos para los cuales las Leyes de Newton no tienen significado evidente.

4.8. APLICACIONES

A4.1.- **Las ecuaciones de Euler**

Sean x_1, x_2, x_3 los ejes del sistema local SL que suponemos solidario con el sólido, y que coinciden con los ejes principales de inercia en el origen, que elegimos en el centro de masa. En fin, designemos por X_1, X_2, X_3 los ejes del sistema inercial SI respecto a cuyas direcciones en la Fig.4.1 se indican los ángulos de Euler que describen la orientación del sólido.Usando como coordenadas generalizadas las coordenadas del centro de masa X_{1G}, X_{2G}, X_{3G} y los ángulos de Euler ϑ, φ, ψ, la velocidad

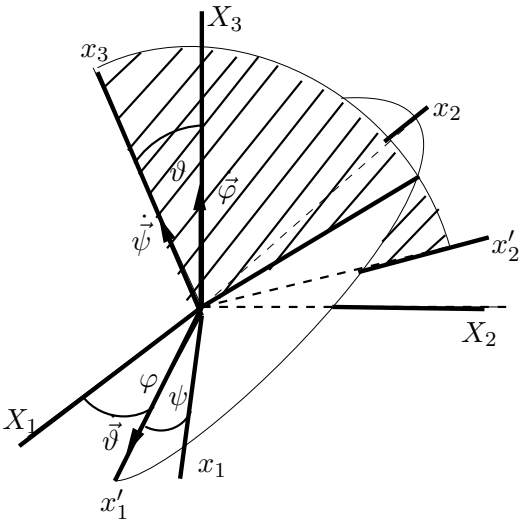

Figura 4.1:

angular del sólido proyectada sobre los ejes del SL tiene las componentes

$$\omega_1 = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi$$
$$\omega_2 = -\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi},$$

y la energía cinética se expresa como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{X}_{1G}^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}_{2G}^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}_{3G}^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2.$$

Evaluando los términos de la Ecuación de Lagrange para ψ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = I_3\omega_3,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \psi} &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} \\ &= I_1\omega_1(-\dot{\vartheta}\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\psi) + I_2\omega_2(-\dot{\vartheta}\cos\psi - \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\psi) \\ &= I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_2\omega_1,\end{aligned}$$

y reemplazando en la Ecuación de Lagrange, obtenemos

$$I_3\dot{\omega}_3 - I_1\omega_1\omega_2 + I_2\omega_2\omega_1 = Q_\psi.$$

Para determinar Q_ψ imaginamos un desplazamiento virtual en que sólo varía ψ; el trabajo virtual será el de la componente τ_3 del torque solamente

$$\delta W = \tau_3\delta\psi = Q_\psi\delta\psi.$$

Por lo tanto,

$$Q_\psi = \tau_3,$$

y reemplazando, llegamos a la ecuación de Euler:

$$\tau_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

ya encontrada anteriormente. Las otras dos ecuaciones de Euler se reencuentran si cambiamos cíclicamente los subíndices.

A4.2.- **El trompo simétrico con púa fija**

Elegimos el sistema inercial SI con su origen en la púa fija, y con su eje X_3 paralelo a $\vec{g}$. El sistema local SL lo elegimos con el mismo origen que el SI; con su eje x_3 ligado al eje de simetría del trompo, y con su eje x_1 ligado a la línea de nodos, por lo que el eje x_1 está siempre contenido en el plano horizontal precesando en torno del eje vertical X_3 con velocidad angular $\dot{\vec{\varphi}}$. Con esta elección, $\dot{\vec{\psi}}$ representa el spin del trompo relativo al sistema SL.

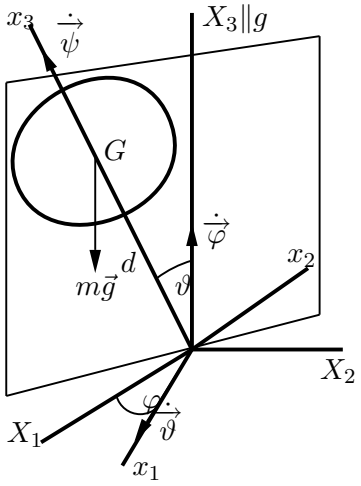

Figura 4.2:

Las componentes de la velocidad angular del sólido, en el sistema SL son

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\vartheta}\\ \omega_2 &= \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

La energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2}I(\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta+\dot{\psi})^2, \end{aligned}$$

y la energía potencial

$$V = mgd\cos\vartheta.$$

La expresión del Lagrangiano es entonces:

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta+\dot{\psi})^2 - mgd\cos\vartheta.$$

Como L no depende explícitamente del tiempo, se conserva el Hamiltoniano. Además, como V sólo depende de ϑ, y como T es una función homogénea cuadrática de $\dot{\vartheta},\dot{\varphi},\dot{\psi}$, el Hamiltoniano es igual a la energía mecánica, la que se conserva. Por último, se observa que L es una función cíclica de φ y ψ lo que significa que los momenta conjugados p_φ y p_ψ se conservan. Las constantes del movimiento son, entonces,

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = I_3\omega_3 = L_3 = cte, \tag{4.19}$$

que implica que se conserva la proyección ω_3 de la velocidad angular del sólido sobre el eje de simetría;

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta + I_3\omega_3\cos\vartheta = cte = L_V \tag{4.20}$$

que es la componente vertical del momento angular,

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2+mgd\cos\vartheta = cte \tag{4.21}$$

que representa la conservación de la energía mecánica.

A4.3.- La barra BC de masa m y largo $2a$ cuelga de un punto fijo A, a través de un resorte ideal AB de un largo natural l_0 y constante k. Si el movimiento del sistema está confinado a un plano vertical, encontrar las componentes de la fuerza generalizada que actúan sobre la barra.
El sistema tiene tres grados de libertad y elegimos el largo r del resorte y los ángulos ϑ y φ como coordenadas generalizadas, tal como señalamos en la Fig. 4.3.

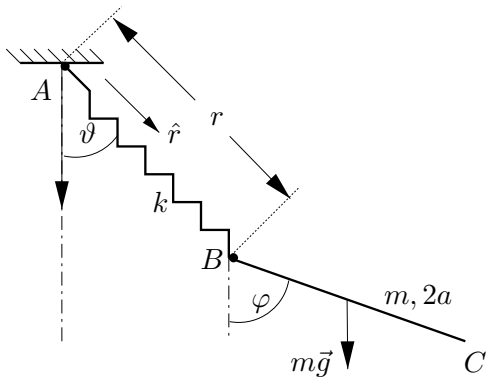

Figura 4.3:

Las fuerzas sobre la barra son: la ejercida por el resorte $-k(r-l_0)\,\hat{r}$ y la fuerza gravitacional $mg\,\hat{\jmath}$. El desplazamiento virtual del punto B que es compatible con las ligaduras lo obtenemos de

$$\vec{r}_B = r\,\hat{r}, \qquad \text{por lo que}$$

$$\delta\vec{r}_B = \delta r\,\hat{r} + r\,\delta\vartheta\,\hat{k}\times\hat{r}.$$

Luego, si llamamos $Q_{er}, Q_{e\vartheta}$ y $Q_{e\varphi}$ a las componentes generalizadas de la fuerza elástica, de acuerdo a la definición dada por la Ec. 4.2, obtenemos

$$\delta W = -k(r-l_0)\,\hat{r}\cdot\delta\vec{r}_B = Q_{er}\,\delta r + Q_{e\vartheta}\,\delta\vartheta + Q_{e\varphi}\,\delta\varphi.$$

De aquí resulta de inmediato que

$$Q_{er} = -k(r-l_0) \qquad \text{y} \qquad Q_{e\vartheta} = Q_{e\varphi} = 0.$$

Para calcular las componentes generalizada debidas a la gravedad escribimos el vector posición del centro de masa

$$\vec{r}_G = x_G\,\hat{\imath} + (r\cos\vartheta + a\cos\varphi)\,\hat{\jmath},$$

$$\text{luego} \qquad \delta\vec{r}_G = \delta x_G\,\hat{\imath} + \delta(r\cos\vartheta + a\cos\varphi)\,\hat{\jmath}.$$

El trabajo virtual de la gravedad es

$$\delta W = mg\,\hat{\jmath}\cdot\delta\vec{r}_G = mg\,\delta(r\cos\vartheta + a\cos\varphi),$$

y si llamamos $Q_{gr}, Q_{g\vartheta}$ y $Q_{g\varphi}$ a las componentes generalizadas de la fuerza debido a la gravedad, podemos escribir

$$mg(\delta r \cos\vartheta - r \operatorname{sen}\vartheta\, \delta\vartheta - a \operatorname{sen}\varphi\, \delta\varphi) = Q_{gr}\, \delta r + Q_{g\vartheta}\, \delta\vartheta + Q_{g\varphi}\, \delta\varphi.$$

Por lo tanto,

$$Q_{gr} = mg\, \cos\vartheta, \qquad Q_{g\vartheta} = -mgr\, \operatorname{sen}\vartheta, \qquad Q_{g\varphi} = -mga\, \operatorname{sen}\varphi.$$

Las componentes generalizadas de la fuerza neta serán

$$Q_r = Q_{er} + Q_{gr} = -k(r - l_0) + mg\, \cos\vartheta,$$

$$Q_\vartheta = Q_{e\vartheta} + Q_{g\vartheta} = -mgr\, \operatorname{sen}\vartheta,$$

$$Q_\varphi = Q_{e\varphi} + Q_{g\varphi} = -mga\, \operatorname{sen}\varphi.$$

Otro método para calcular las componentes generalizadas consiste en expresar las fuerzas en componentes cartesianas—proyectándolas sobre un sistema $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ como el indicado en la figura— y reemplazarlas en la Ec. 4.3. Por último, tomando en cuenta que las dos fuerzas son conservativas podemos expresar las energías potenciales en función de las coordenadas generalizadas y obtener las componentes usando la Ec. 4.9.

A4.4.- Encontrar las ecuaciones del movimiento de Lagrange en el sistema de la Fig. 4.4, para oscilaciones de pequeña amplitud en torno de la posición de equilibrio estable. Suponer que el movimiento está contenido en el plano vertical.

Como el sistema tiene dos grados de libertad elegimos como coordenadas generalizadas la posición x de M medida desde la posición de equilibrio del extremo del resorte, y el ángulo ϑ que forma la barra $(m, 2l)$ con la vertical.

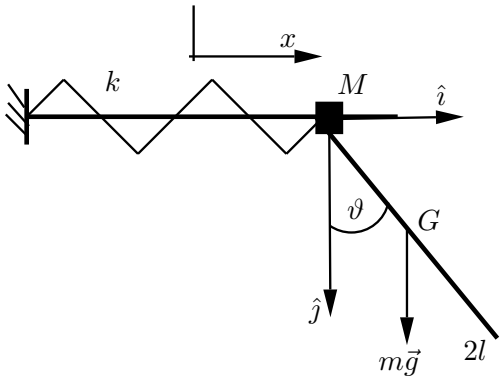

Figura 4.4:

La energía cinética de la barra es

$$T_b = \frac{1}{2}\, m v_G^2 + \frac{1}{2}\, I_G\, \omega_b^2.$$

Para determinar v_G derivamos respecto del tiempo las coordenadas cartesianas del centro de masa

$$X_G = x + l\, \operatorname{sen}\vartheta \qquad \text{e} \qquad Y_G = l\, \cos\vartheta$$

y obtenemos:

$$\dot{X}_G = \dot{x} + l\,\dot{\vartheta}\, \cos\vartheta \qquad \text{e} \qquad \dot{Y}_G = -l\,\dot{\vartheta}\, \operatorname{sen}\vartheta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} v_G^2 &= \dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 \\ &= \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\vartheta}^2 + 2l\,\dot{x}\,\dot{\vartheta}\, \cos\vartheta. \end{aligned}$$

La expresión de la energía cinética del sistema, incluyendo la de la partícula M es, entonces

$$T = \frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\big(\frac{4}{3}\, l^2\,\dot{\vartheta}^2 + 2l\,\dot{x}\,\dot{\vartheta}\, \cos\vartheta\big),$$

y la de la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}\, k\, x^2 - mg\, l\, \cos\vartheta.$$

Por lo tanto, el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m\big(\frac{4}{3}\, l^2\,\dot{\vartheta}^2 + 2l\,\dot{x}\,\dot{\vartheta}\, \cos\vartheta\big) - \frac{1}{2}\, k\, x^2 + mg\, l\, \cos\vartheta.$$

Reemplazando las derivadas correspondientes en las ecuaciones del movimiento de Lagrange se llega a

$$\begin{aligned} (M+m)\,\ddot{x} + ml\,\ddot{\vartheta}\, \cos\vartheta - ml\,\dot{\vartheta}^2\, \operatorname{sen}\vartheta + k\, x &= 0 \\ \frac{4}{3}\, m\, l^2 \ddot{\vartheta} + ml\,\ddot{x}\, \cos\vartheta + mg\, l\, \operatorname{sen}\vartheta &= 0 \end{aligned}$$

En la posición de equilibrio—en éste ejemplo—x y ϑ son nulos, por lo que cuando hablamos de oscilaciones de pequeña amplitud significa que debemos reemplazar valores pequeños de x y ϑ, para los cuales $\dot{x}, \dot{\vartheta}, \ddot{x}$, y $\ddot{\vartheta}$ también lo son. Además podemos aproximar

$$\operatorname{sen}\vartheta = \vartheta \qquad \cos\vartheta = 1$$

Si ahora despreciamos todos los términos que sean productos de dos o más de estas pequeñas cantidades, o sea linealizando las dos ecuaciones del movimiento, obtenemos las ecuaciones aproximadas válidas para oscilaciones de pequeña amplitud

$$\begin{aligned}(M+m)\,\ddot{x} + ml\,\ddot{\vartheta} + k\,x &= 0\\ ml\,\ddot{x} + \frac{4}{3}\,m\,l^2\,\ddot{\vartheta} + mg\,l\,\vartheta &= 0.\end{aligned}$$

A estas mismas ecuaciones podemos llegar, si aproximamos el Lagrangiano, pero reteniendo hasta términos de segundo orden, despreciando los términos de tercer orden y superiores. En este caso, debemos reemplazar $\cos\vartheta$ por $1-\frac{1}{2}\vartheta^2$. El Lagrangiano aproximado sería

$$L = \frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\frac{4}{3}\,l^2\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\,m\,2l\dot{x}\,\dot{\vartheta} - \frac{1}{2}\,k\,x^2 + mg\,l\,(1-\frac{1}{2}\vartheta^2),$$

del que deduciríamos las ecuaciones anteriores.