

## Capítulo 5

# PEQUEÑAS OSCILACIONES

### 5.1. Introducción

Muchas veces, las partículas de un sistema físico experimentan pequeños desplazamientos en torno de sus respectivas posiciones de equilibrio estable. El movimiento de cada partícula será, en general, una función que dependerá de las coordenadas de todas las demás, por lo que se dice que el movimiento de la coordenada  $x_i$  está *acoplado* al movimiento de las otras partículas. Este complicado movimiento se puede expresar como una superposición lineal de un número finito de oscilaciones armónicas de distintas frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots$ , donde cada frecuencia  $\omega_i$  representa un estado posible en el que *todas* las partículas del sistema oscilan con esa misma frecuencia  $\omega_i$ . Siempre es posible elegir las condiciones iniciales de modo que en el movimiento resultante todas las partículas oscilen con la misma frecuencia. En este caso se dice que se ha excitado uno de los *modos normales* de oscilación caracterizado por la *frecuencia normal*  $\omega_i$ .

### 5.2. Acoplamiento de dos osciladores armónicos

Para ilustrar las ideas recién expuestas, consideremos el caso de dos osciladores armónicos idénticos, acoplados por un resorte de rigidez  $K$ . Supongamos que el movimiento de las partículas está confinado al eje  $x$ , y que ambas tienen igual masa  $m$ .

Como el sistema tiene dos grados de libertad, elegimos dos coordenadas generalizadas  $x_1$  y  $x_2$ , medidas a partir de las posiciones de equilibrio de las partículas respectivas. En consecuencia, las energías cinética  $T$  y potencial  $V$  del sistema son:

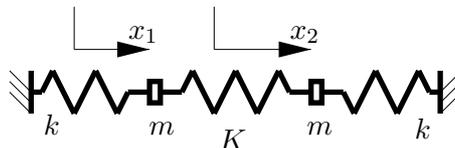


Figura 5.1:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2,$$

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2,$$

y el Lagrangiano del sistema resulta ser entonces:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2. \quad (5.1)$$

De las ecuaciones del movimiento de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2$$

obtenemos las dos ecuaciones diferenciales acopladas siguientes:

$$m\ddot{x}_1 + (K + k)x_1 - Kx_2 = 0, \quad (5.2)$$

$$m\ddot{x}_2 + (K + k)x_2 - Kx_1 = 0. \quad (5.3)$$

Estamos interesados en encontrar aquellas soluciones particulares, de entre todas las posibles, en que ambas partículas oscilan con *la misma frecuencia*, o sea, estamos buscando los *modos normales de oscilación* de este sistema. Luego, suponemos que las soluciones son de la forma siguiente

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

donde admitimos que ambas soluciones tengan la misma fase si  $A_1$  y  $A_2$  tienen el mismo signo, o que tengan oposición de fase si  $A_1$  y  $A_2$  tienen signos opuestos. Considerando que  $\ddot{x}_i = -\omega^2 A_i \cos(\omega t + \varphi)$  podemos reemplazar estas soluciones en las ecuaciones diferenciales recién encontradas,

cancelando el factor  $\cos(\omega t + \varphi)$  y reordenando llegamos a las dos siguientes ecuaciones lineales y homogéneas en las amplitudes

$$(K + k - m\omega^2)A_1 - KA_2 = 0, \quad (5.4)$$

$$-KA_1 + (K + k - m\omega^2)A_2 = 0. \quad (5.5)$$

Para descartar las soluciones triviales  $A_1 = A_2 = 0$ , el determinante de los coeficientes de  $A_1$  y  $A_2$  (*determinante secular*) debe anularse:

$$\begin{vmatrix} K + k - m\omega^2 & -K \\ -K & K + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

resultando una ecuación de segundo grado (hay dos grados de libertad) en  $\omega^2$ , llamada *ecuación secular*:

$$(K + k - m\omega^2)^2 - K^2 = 0,$$

de donde obtenemos las dos raíces

$$\omega_1 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2K + k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estas frecuencias se denominan *características*, o *propias*, o *eigenfrecuencias*, o *normales*, o *modales*. Hemos encontrado, entonces, que el sistema tiene dos modos normales de oscilación representados por las soluciones:

$$\text{modo (1)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \end{array} \right.$$

$$\text{modo (2)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = A'_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A'_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{array} \right.$$

Las amplitudes  $A_i$  no son independientes, puesto que deben satisfacer la Ec. 5.4 y la Ec. 5.5 para cada  $\omega$ . Al reemplazar  $\omega_1$ , obtenemos

$$A_1 = A_2 = A,$$

y al reemplazar  $\omega_2$ , obtenemos

$$A'_1 = -A'_2 = B.$$

Por lo tanto, las soluciones para los dos modos normales son:

$$\text{para } \omega = \omega_1, \quad x_1 = x_2 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (5.6)$$

$$\text{y para } \omega = \omega_2, \quad x_1 = -x_2 = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (5.7)$$

Luego, si imponemos como condición inicial  $x_{10} = x_{20}$ , las dos partículas oscilarán *en fase* con frecuencia normal  $\omega_1$ ; este movimiento representa lo que se llama el *modo simétrico* de oscilación. En cambio, si elegimos como condiciones iniciales  $x_{10} = -x_{20}$ , las dos partículas oscilarán en *oposición de fase* con frecuencia angular  $\omega_2$ ; este movimiento representa el modo *antisimétrico* de oscilación.

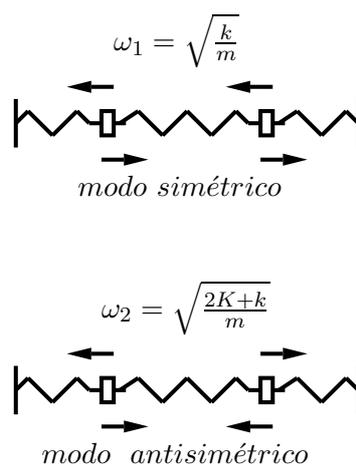


Figura 5.2: Modos normales

Nótese que el modo simétrico es el de menor frecuencia. Esto representa una propiedad de los modos normales de oscilación: el de más alta simetría es el que tiene la frecuencia más baja.

Como los modos encontrados son soluciones particulares de las dos ecuaciones diferenciales acopladas, una solución general de ellas será una superposición lineal de los dos modos (simétrico y antisimétrico):

$$x_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (5.8)$$

$$x_2 = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (5.9)$$

donde aparecen cuatro constantes de integración  $C_1, C_2, \varphi_1$ , y  $\varphi_2$  determinadas por las condiciones iniciales—posición y velocidad—de cada una de las partículas.

**EJEMPLO.-** Supongamos que en  $t = 0$  se tienen las siguientes condiciones iniciales:

$$x_{10} = A \quad \dot{x}_{10} = 0 \quad x_{20} = 0 \quad \dot{x}_{20} = 0$$

Introduciéndolas en las ecuaciones 5.8 y 5.9, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= C_1 \cos \varphi_1 + C_2 \cos \varphi_2, \\ 0 &= C_1 \cos \varphi_1 - C_2 \cos \varphi_2, \\ 0 &= -\omega_1 C_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 C_2 \sin \varphi_2, \\ 0 &= -\omega_1 C_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 C_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

De las dos últimas resulta de inmediato que

$$\sin \varphi_1 = 0 \implies \varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

lo que al reemplazar en las dos primeras nos da

$$\begin{aligned} A &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 - C_2, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}A.$$

Por lo tanto, la solución correspondiente a estas condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \\ x_2 &= \frac{1}{2}A(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \end{aligned}$$

lo que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t, \\ x_2 &= -A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t. \end{aligned}$$

Las frecuencias son muy parecidas cuando el acoplamiento entre los osciladores es débil, por lo que  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_1 \approx \omega_2$  es la frecuencia aproximada de la oscilación resultante, y cuya amplitud varía armónica y lentamente con una frecuencia  $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ .

Hemos dicho que la elección de coordenadas generalizadas es arbitraria. Veamos qué pasa si elegimos como coordenadas generalizadas las siguientes

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad y_2 = x_1 - x_2$$

y las reemplazamos en las ecuaciones 5.2 y 5.3. Se descubre que satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{y}_1 + \frac{k}{m}y_1 = 0, \quad (5.10)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{2K + k}{m}y_2 = 0. \quad (5.11)$$

Esto significa entonces, que, cualquiera que sea el movimiento real del sistema, estas nuevas coordenadas se mueven con independencia total (no están acopladas); cada una oscila con movimiento armónico simple; la coordenada  $y_1$  varía con la *frecuencia normal*  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  correspondiente al modo simétrico, y la coordenada  $y_2$  oscila con la frecuencia  $\omega_2 = \sqrt{\frac{(2K+k)}{m}}$ . Además, las energías cinética y potencial y el Lagrangiano quedan expresados como sumas de cuadrados de  $y_1$ , de  $y_2$ , de  $\dot{y}_1$  y de  $\dot{y}_2$ ; o sea, no figuran términos cruzados entre estas variables puesto que están desacopladas y no interactúan; no hay transferencia de energía entre estos dos movimientos y cada uno de ellos conserva su propia energía. Estas coordenadas que dan lugar a estas propiedades tan especiales se llaman *coordenadas normales*. En el presente caso, si  $y_2 = 0$  entonces  $x_1 = x_2$  y el sistema oscila en el modo simétrico; si  $y_1 = 0$ , se tiene que  $x_1 = -x_2$  y el sistema oscila en el modo antisimétrico; en otras palabras, cuando el sistema oscila en un modo normal, sólo una coordenada normal es distinta de cero.

### 5.3. Pequeñas Oscilaciones. Caso general

Consideremos un sistema holónomo formado por  $N$  partículas con  $l$  grados de libertad, cuyas fuerzas derivan de un potencial, y supongamos que oscila en torno de su posición de equilibrio con pequeña amplitud. Para encontrar el Lagrangiano, primero debemos determinar las expresiones de la energía cinética y de la potencial en las vecindades de la posición de equilibrio.

Si suponemos además, que las ecuaciones de transformación de coordenadas generalizadas a cartesianas no tienen dependencia explícita del tiempo—o sea, si  $x_i = x_i(\vec{q})$ —la energía cinética debe ser una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas. Según vimos en el capítulo anterior, Ec.4.16

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (5.12)$$

donde

$$m_{kj} = m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (5.13)$$

es una función de  $\vec{q}$ . Para evaluar las funciones  $m_{jk}$ , hacemos un desarrollo en serie de Taylor en torno de la posición de equilibrio del sistema, teniendo presente que  $q_r$  se mide desde la posición de equilibrio de  $m_r$ ; o sea que en la posición de equilibrio el valor de  $q_r$  es  $q_{r0} = 0$ , para  $r = 1, 2, \dots, l$ . Todas

las cantidades que evaluamos en la posición de equilibrio llevan un subíndice cero. Luego,

$$m_{jk} = m_{jk0} + \sum_r \left. \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_r} \right|_0 q_r + \dots$$

En esta expansión podemos despreciar todos los términos en  $q_r$  y productos de las coordenadas ya que son muy pequeños y despreciables frente a  $m_{jk0}$  el que ahora es un número constante. Por lo tanto,

$$m_{jk} = m_{kj} = m_{jk0} = Cte \quad (5.14)$$

son números que definen una matriz real, simétrica y positiva puesto que la energía a cinética es positiva, y de  $l \times l$  elementos, que se suele llamar *matriz de masa generalizada* ( $M$ ).

Para encontrar la energía potencial en torno de la posición de equilibrio, en forma análoga al caso anterior, hacemos otro desarrollo en serie de Taylor:

$$V(\vec{q}) = V_0 + \sum_k \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 q_j q_k + \dots$$

Como el nivel cero de energía potencial se elige arbitrariamente, tomaremos  $V_0 = 0$ . Además, en una posición de equilibrio se cumple que

$$F_j = 0, \quad \text{luego} \quad \sum_j F_j \left. \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right|_0 = 0 = - \sum_j \left. \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \right|_0 = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 = 0.$$

Por último, como las oscilaciones son de pequeña amplitud, despreciamos todos los términos de orden superior al segundo y resulta

$$\boxed{V(\vec{q}) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k k_{jk} q_j q_k,} \quad (5.15)$$

donde

$$\boxed{k_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 = k_{kj} = Cte.} \quad (5.16)$$

Los números  $k_{jk}$  conforman una matriz real, simétrica, positiva puesto que la energía a potencial es positiva en torno de la posición de equilibrio, y de  $l \times l$  elementos llamada *matriz de rigidez generalizada* ( $K$ ).

Con estas aproximaciones, la función de Lagrange queda como sigue

$$L = \sum_j \sum_k \frac{1}{2} \{m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - k_{jk} q_j q_k\}, \quad (5.17)$$

y derivando, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_j m_{ij} \dot{q}_j, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= - \sum_j k_{ij} q_j, \end{aligned}$$

y reemplazando en las ecuaciones de movimiento de Lagrange resulta

$$\boxed{\sum_j \{m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j\} = 0.} \quad (5.18)$$

La relación anterior representa un sistema de  $l$  ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con todas las coordenadas acopladas. La forma matricial de las ecuaciones 5.18 es

$$(M)(\ddot{\vec{q}}) + (K)(\vec{q}) = 0 \quad (5.19)$$

donde hemos definido la matriz de masa generalizada

$$(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1l} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{l1} & m_{l2} & m_{l3} & \cdots & m_{ll} \end{pmatrix}$$

y la matriz de rigidez generalizada

$$(K) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1} & k_{l2} & k_{l3} & \cdots & k_{ll} \end{pmatrix}$$

Como queremos encontrar los modos normales en que todas las coordenadas oscilan armónicamente con la misma frecuencia, ensayamos soluciones de la forma

$$q_j = a_j \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, l$$

luego,

$$\ddot{q}_j = -\omega^2 a_j \cos(\omega t + \varphi)$$

y reemplazando en Ec. 5.18, resulta

$$\left[ \sum_j \{k_{ij} - m_{ij}\omega^2\} a_j \right] \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Por lo tanto, dividiendo por  $\cos(\omega t + \varphi) \neq 0$

$$\boxed{\sum_j \{k_{ij} - m_{ij}\omega^2\} a_j = 0} \quad (5.20)$$

La relación anterior representa un sistema de  $l$  ecuaciones lineales y homogéneas en las amplitudes  $a_j$  como las siguientes

$$\begin{array}{ccccccc} (k_{11} - m_{11}\omega^2)a_1 & + & (k_{12} - m_{12}\omega^2)a_2 & + \cdots + & (k_{1l} - m_{1l}\omega^2)a_l & = & 0 \\ (k_{21} - m_{21}\omega^2)a_1 & + & (k_{22} - m_{22}\omega^2)a_2 & + \cdots + & (k_{2l} - m_{2l}\omega^2)a_l & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + \cdots + & \vdots & = & 0 \\ (k_{l1} - m_{l1}\omega^2)a_1 & + & (k_{l2} - m_{l2}\omega^2)a_2 & + \cdots + & (k_{ll} - m_{ll}\omega^2)a_l & = & 0 \end{array}$$

Para descartar las soluciones triviales  $\omega_r = 0$  para  $r = 1, 2, \dots, l$ , el *determinante secular*, o sea el de los factores de  $a_j$ , debe ser nulo

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} - m_{12}\omega^2 & \cdots & k_{1l} - m_{1l}\omega^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega^2 & k_{22} - m_{22}\omega^2 & \cdots & k_{2l} - m_{2l}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1} - m_{l1}\omega^2 & k_{l2} - m_{l2}\omega^2 & \cdots & k_{ll} - m_{ll}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

De aquí resulta la *ecuación secular* que es una ecuación algebraica de grado  $l$  en  $\omega^2$ . En general, hay  $l$  raíces  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, \dots, \omega_l$  que corresponden a las  $l$  *frecuencias normales* o propias del sistema. Estas raíces son reales y positivas ya que las matrices  $(M)$  y  $(K)$  son reales, simétricas y positivas. Existen tantos modos normales como grados de libertad  $l$ , y cada modo normal estará caracterizado por su frecuencia normal. Al reemplazar  $\omega_r$  en las ecuaciones 5.20 obtenemos las razones entre las amplitudes  $a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_l$  correspondientes a ese modo  $r^{mo}$ .

Si usamos la representación matricial, la Ec. 5.20 queda como sigue

$$(K)(\vec{a}) = \omega^2(M)(\vec{a}) \quad \text{o bien} \quad ((K) - \omega^2(M))(\vec{a}) = 0 \quad (5.21)$$

de donde obtenemos el mismo determinante secular. También podemos escribir

$$(M)^{-1}(K)(\vec{a}) = \omega^2(\vec{a}) \quad (5.22)$$

que es una típica ecuación de valores propios. Sus valores propios son los  $l$  valores de  $\omega^2$  y sus vectores propios son los  $l$  vectores  $(\vec{a})$  correspondientes. Como a cada valor propio  $\omega_r$  corresponde un conjunto de amplitudes (vector propio), debemos introducir un segundo subíndice que así lo indique. Por lo tanto, designaremos por  $(\vec{a}_r)$  al vector propio asociado a la raíz  $r^{ma}$ , o sea, asociado a la frecuencia normal  $\omega_r$ . La coordenada generalizada  $j^{ma}$  cuando el sistema esté oscilando en el modo normal  $r^{mo}$  será

$$q_{jr} = a_{jr} \cos(\omega_r t + \varphi_r)$$

Para condiciones iniciales arbitrarias, el sistema oscilará en forma muy compleja. La solución general de las ecuaciones del movimiento será una superposición lineal de las soluciones particulares que representan los modos normales:

$$q_j = \sum_r A_{jr} \cos(\omega_r t + \varphi_r).$$

Una propiedad interesante de los  $l$  vectores propios es que forman un conjunto de *vectores ortogonales*. En efecto, si en la Ec. 5.21 reemplazamos dos valores propios  $\omega_r$  y  $\omega_s$  resulta

$$\begin{aligned} \omega_r^2(M)(\vec{a}_r) &= (K)(\vec{a}_r), \\ \omega_s^2(M)(\vec{a}_s) &= (K)(\vec{a}_s). \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por la matriz traspuesta  $(\vec{a}_s)$  de  $(\vec{a}_s)$ , y la segunda, por la traspuesta  $(\vec{a}_r)$  de  $(\vec{a}_r)$  se obtiene

$$\omega_r^2(\vec{a}_s)(M)(\vec{a}_r) = (\vec{a}_s)(K)(\vec{a}_r), \quad (5.23)$$

$$\omega_s^2(\vec{a}_r)(M)(\vec{a}_s) = (\vec{a}_r)(K)(\vec{a}_s). \quad (5.24)$$

Si tomamos, ahora, la traspuesta de la Ec. 5.23

$$\omega_r^2(\vec{a}_r)(\vec{M})(\vec{a}_s) = (\vec{a}_r)(\vec{K})(\vec{a}_s).$$

Pero, como las matrices  $(M)$  y  $(K)$  son simétricas, se debe cumplir que

$$(\vec{M}) = (M) \quad \text{y} \quad (\vec{K}) = (K),$$

por lo que la ecuación anterior queda como

$$\omega_r^2 \widetilde{(\vec{a}_r)}(M)(\vec{a}_s) = \widetilde{(\vec{a}_r)}(K)(\vec{a}_s). \quad (5.25)$$

Si a esta ecuación le restamos la Ec.5.24 resulta

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \widetilde{(\vec{a}_r)}(M)(\vec{a}_s) = 0. \quad (5.26)$$

De aquí tenemos de inmediato que

$$\widetilde{(\vec{a}_r)}(M)(\vec{a}_s) = 0 \quad \text{para } r \neq s \quad (5.27)$$

o, en forma equivalente

$$\sum_j \sum_k m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0 \quad \text{para } r \neq s. \quad (5.28)$$

Cualquiera de las dos ecuaciones anteriores representa la propiedad de ortogonalidad de los vectores propios.

## 5.4. Coordenadas Normales

Supongamos que hemos encontrado una transformación a un nuevo sistema de coordenadas generalizadas  $\vec{u} = u_1, u_2, \dots, u_l$  que diagonaliza las matrices  $(M)$  y  $(K)$ . Esto significa que

$$m_{jk} = \delta_{jk} m'_j \quad \text{y} \quad k_{jk} = \delta_{jk} k'_j \quad \text{donde} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Introduciendo lo anterior en las ecuaciones 5.12 y 5.15, las expresiones de las energías cinética y potencial se reducen a

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m'_j \dot{u}_j^2,$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_j k'_j u_j^2,$$

y el Lagrangiano queda

$$L = \frac{1}{2} \sum_j \{m'_j \dot{u}_j^2 - k'_j u_j^2\}.$$

Vemos que  $T, V$  y  $L$  son sumas de cuadrados de  $u_j$  y de  $\dot{u}_j$ ; no figuran productos cruzados como  $u_j u_k$  y  $\dot{u}_j \dot{u}_k$ . Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento de Lagrange no están acopladas:

$$\begin{aligned} m'_1 \ddot{u}_1 + k'_1 u_1 &= 0 \\ m'_2 \ddot{u}_2 + k'_2 u_2 &= 0 \\ \vdots + \vdots &= 0 \\ m'_j \ddot{u}_j + k'_j u_j &= 0 \\ \vdots + \vdots &= 0 \end{aligned}$$

y cada coordenada  $u_j$  oscila con movimiento armónico simple de frecuencia normal  $\sqrt{(k'_j/m'_j)}$ , en forma totalmente independiente de las demás coordenadas. Cuando el sistema oscila en el modo normal  $r^{mo}$  solo la coordenada  $u_r$  es distinta de cero. Este sistema de coordenadas  $\vec{u}$  que satisface las propiedades recién expuestas se conoce como sistema de *coordenadas normales*.

EJEMPLO.- Encontramos las frecuencias normales del caso inicial, consistente en los dos osciladores acoplados, usando la representación matricial. Recordemos que hay  $l = 2$  grados de libertad y que elegimos  $x_1$  y  $x_2$  como coordenadas generalizadas.

Para encontrar la matriz ( $M$ ) comparamos la expresión general de la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \{m_{11} \dot{x}_1^2 + m_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + m_{21} \dot{x}_2 \dot{x}_1 + m_{22} \dot{x}_2^2\},$$

con la forma particular correspondiente a la presente situación

$$T = \frac{1}{2} \{m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_2^2\}.$$

Para que ambas relaciones representen la misma cantidad se debe cumplir que

$$m_{11} = m_{22} = m \quad m_{12} = m_{21} = 0$$

Luego,

$$(M) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz  $K$ , acudimos a la definición de sus elementos (Ec. 5.16) y obtenemos:

$$k_{11} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right|_0 = K + k,$$

$$k_{22} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right|_0 = K + k,$$

$$k_{12} = k_{21} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_0 = -K.$$

Luego,

$$(K) = \begin{pmatrix} K + k & -K \\ -K & K + k \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el determinante correspondiente a la Ec. 5.20 o Ec. 5.21 será

$$\begin{vmatrix} K + k - m\omega^2 & -K \\ -K & K + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

y la ecuación secular es

$$(K + k - m\omega^2)^2 - K^2 = 0,$$

de donde resultan finalmente las frecuencias normales:

$$\omega_1 = \left( \frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \left( \frac{2K + k}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 5.5. La cuerda cargada

Consideremos el sistema formado por una cuerda de longitud  $l$  con sus dos extremos fijos. Sobre la cuerda se colocan  $n$  partículas iguales de masa  $m$  cada una y equiespaciadas en una distancia  $d$ .

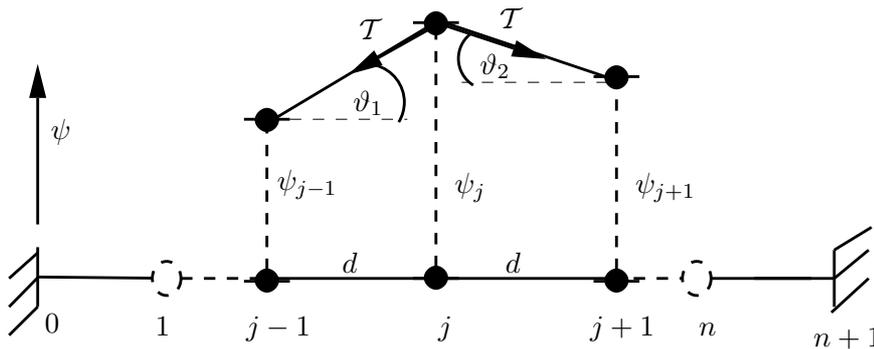


Figura 5.3: Cuerda cargada

En la Fig. 4.4 se ha indicado la cuerda cargada en su posición de equilibrio y en una posición cualquiera. Despreciaremos la masa de la cuerda y la acción gravitacional sobre las partículas; supondremos que la deformación  $\psi_j$  de la cuerda es transversal, pero de pequeña amplitud. En esta aproximación se supone que estos desplazamientos, medidos desde la posición de equilibrio de la cuerda, son suficientemente pequeños como para suponer que la tensión de la cuerda es constante e igual al valor  $\tau$  que tiene cuando está en la posición de equilibrio.

Recordando que

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}} = \operatorname{tg} \vartheta (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}},$$

y suponiendo que  $\vartheta$  es pequeño, podemos aproximar

$$\operatorname{sen} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{y} \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \vartheta = 1.$$

Aplicando lo anterior a la figura, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \vartheta_1 &= \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{d}, \\ \operatorname{sen} \vartheta_2 &= \frac{\psi_j - \psi_{j+1}}{d}. \end{aligned}$$

Por otra parte, proyectando en la dirección transversal, la segunda ley de Newton nos da para la partícula  $j$

$$\sum F_\psi = -\tau \operatorname{sen} \vartheta_1 - \tau \operatorname{sen} \vartheta_2 = m\ddot{\psi}_j.$$

Reemplazando,

$$m\ddot{\psi}_j = \frac{\tau}{d} [\psi_{j-1} - 2\psi_j + \psi_{j+1}], \quad (5.29)$$

que representa un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales y que muestra que el movimiento de la masa  $m_j$  está solamente acoplado a las masas inmediatamente vecinas. Este mismo análisis es extensible a las deformaciones longitudinales de un resorte, obteniéndose la misma ecuación anterior si reemplazamos  $\tau/d$  por la rigidez  $k$  del resorte.

Para determinar los modos normales de oscilación ensayamos, como ya lo hemos hecho anteriormente, soluciones de forma armónica

$$\psi_j = a_j \cos(\omega t + \varphi)$$

que deben satisfacer las condiciones de borde

$$\psi_0 = \psi_{n+1} = 0,$$

pues los extremos de la cuerda están fijos. Esto, a su vez implica que

$$a_0 = a_{n+1} = 0.$$

Reemplazando la solución particular en la Ec. 5.29 ,resulta

$$\left[ -m\omega^2 a_j - \frac{\tau}{d} (a_{j-1} - 2a_j + a_{j+1}) \right] \cos(\omega t + \varphi) = 0,$$

de donde se obtiene

$$-\frac{\tau}{d} a_{j-1} + \left( 2\frac{\tau}{d} - m\omega^2 \right) a_j - \frac{\tau}{d} a_{j+1} = 0 \quad (5.30)$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

La relación 5.30 representa un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas, lineales y homogéneas en las amplitudes  $a_j$ , cuya solución no trivial exige que el determinante de los coeficientes sea nulo. Teniendo presente las condiciones de borde, la expresión del determinante queda como sigue

$$\begin{vmatrix} 2\frac{\tau}{d} - m\omega^2 & -\frac{\tau}{d} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{\tau}{d} & 2\frac{\tau}{d} - m\omega^2 & -\frac{\tau}{d} & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{\tau}{d} & 2\frac{\tau}{d} - m\omega^2 & -\frac{\tau}{d} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Observamos que solo los elementos de la banda diagonal que son inmediatamente vecinos a la diagonal del determinante son diferentes de cero; esto refleja que cada partícula interactúa con las dos inmediatamente vecinas. El desarrollo de este determinante corresponde a la ecuación secular de grado  $n$  en  $\omega^2$ . No nos detendremos a buscar métodos para encontrar las frecuencias normales ni las razones entre las amplitudes. Más bien exploraremos lo que ocurre cuando crece el número de partículas.

## 5.6. La cuerda continua y la ecuación de ondas

Supongamos que el número de partículas crece indefinidamente, y que la distancia entre ellas—que designamos por  $\Delta x$ —tiende a cero de modo que

el largo de la cuerda se mantiene constante e igual a  $l$ . Así, la cuerda con carga discreta se transforma en una cuerda con distribución continua de masa. La masa de cada partícula la representamos por  $\Delta m$  y tiende a cero de modo que la masa de la cuerda es constante e igual a  $m$ . La densidad lineal de la cuerda la definimos como  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$ , en el límite cuando  $\Delta x$  tiende a cero. Sólo consideraremos el caso en que las partículas son de igual masa y equiespaciadas, por lo que la densidad lineal  $\mu$  será constante. En otras palabras, nos limitaremos a estudiar el caso de la cuerda continua uniforme ( $\mu = cte$ ), de masa  $m$  y longitud  $l$  en ausencia de campo gravitacional.

Suponiendo una deformación transversal  $\psi(x, t)$ , la ecuación del movimiento es la misma que la Ec. 5.29, pero debemos expresarla de acuerdo a la nueva notación

$$\Delta m \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\Delta x} \left\{ \psi(x - \Delta x, t) - \psi(x, t) + \psi(x + \Delta x, t) - \psi(x, t) \right\};$$

pero,

$$\begin{aligned} \psi(x + \Delta x, t) &= \psi(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \\ \psi(x - \Delta x, t) &= \psi(x, t) - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \dots \end{aligned}$$

y  $\Delta m = \mu \Delta x$ , por lo que al reemplazar en la ecuación del movimiento y despreciar términos en potencias de  $(\Delta x)$ , superiores a dos obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2},$$

o sea,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = 0}, \quad (5.31)$$

en la que hemos definido

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (5.32)$$

Esta ecuación ??, que se conoce como *la ecuación de ondas* en una dimensión, representa una deformación o perturbación que se propaga a lo largo de la cuerda con una *velocidad de propagación o velocidad de fase*  $v$ .

## 5.7. APLICACIONES

A1.-