Pauta P1 Control 2

FI21A - Mecánica
Prof. Patricio Aceituno
Semestre Otoño 2007
por Kim Hauser

Cualquier método de solución es válido si es correcto.

P1.
Considere un aro de radio R que se encuentra fijo en un plano vertical. A lo largo del aro desliza con roce despreciable un anillo de masa m. Inicialmente éste se encuentra en reposo en el punto más alto del aro.

(a) Si el anillo desliza sobre el aro, luego de moverlo ligeramente de su posición de equilibrio, calcule la fuerza de interacción entre el aro y el anillo cuando éste alcanza la posiciones $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi$.

(b) Calcule el período de pequeñas oscilaciones del anillo alrededor de su posición de equilibrio estable.

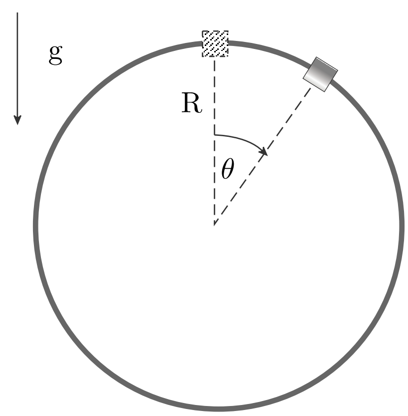

Fig. P1

Solución
(a) En coordenadas polares la posición, velocidad y aceleración de la partícula son:

$$\vec{r} = R\hat{\rho}, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

La normal no realiza trabajo y la fuerza gravitatoria es conservativa, luego se conserva la energía mecánica total:

$$E_i = E_f \Leftrightarrow \underbrace{2mgR}_{\substack{definiendo \\ V_g(\theta=\pi)=0}} = E(\theta) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2) + mgR(1+\cos(\theta)) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left[1-\cos(\theta)\right]. \quad Luego: \quad \dot{\theta}^2(\theta=\pi/2) = \frac{2g}{R}; \quad \dot{\theta}^2(\theta=\pi) = \frac{4g}{R} \tag{2}$$

Las ecuaciones escalares de movimiento son:

$$\hat{\rho}) \qquad -mR\dot{\theta}^2 = -N - mg\cos(\theta) \tag{3}$$

$$\hat{\theta}) \quad mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) \tag{4}$$

$$\hat{\rho}) \Rightarrow N = mR\dot{\theta}^2 - mg\cos(\theta) \quad \xrightarrow{Usando\ (2)} \quad N_{\pi/2} = 2mg; \quad N_{\pi} = 5mg. \tag{5}$$

(b) La energía potencial del sistema es la gravitatoria $V_g(\theta) = mgR(1 + \cos(\theta))$. Para calcular los puntos de equilibrio hay que derivar V_g con respecto a θ e igualar a cero. Es claro (y lógico además) que los puntos de equilibrio son los que hacen a $\sin(\theta) = 0$, i.e, $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$.
Estabilidad:

$$\frac{d^2V_g}{d\theta^2}(\theta_1 = 0) = -mgR < 0 \Longrightarrow INESTABLE \tag{6}$$

$$\frac{d^2V_g}{d\theta^2}(\theta_2 = \pi) = mgR > 0 \Longrightarrow ESTABLE \tag{7}$$

Para la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable $\theta_2 = \pi$, reconocemos la constante c en la energía tal que $E = \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 + V \Rightarrow c = mR^2$. Así:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{\frac{d^2V_g}{d\theta^2}(\theta_2 = \pi)}{c}} = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{R}} \Longrightarrow T_{p.o.} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{8}$$