PAUTA - PUNTAJE P2 - C3

(a) $\vec{F} = -c\hat{r}$ es un campo de fuerzas central $\Rightarrow$ conservativo

Su energía potencial asociada:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_*}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_*}^{\vec{r}} -c\hat{r}\cdot(dr\,\hat{r}+\dots) = c\int_{r_*}^{r} dr = c(r-r_*)$$

Tenemos la libertad de elegir r_* como queremos, como uno tiene que ser el mejor amigo de sí mismo (si no, ¿quién?) elegimos lo más fácil: $r_* = 0$. Así nos quedamos con:

$$U(r) = cr \qquad 0{,}5$$

Ya dijimos que $\vec{F}$ es conservativa y como es la única fuerza sobre m, su energía mecánica se conserva:

$$E_{MT} = \frac{1}{2}m v^2 + U(r) = cte$$

Pero, como en el caso de movimiento planetario, como la fuerza es central, el movimiento ocurre en un plano, pues $\vec{l}$ es conservado. Sea $\|\vec{l}\| = l$, entonces:

$$E_{MT} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + cr}_{V_{eff}(r)}$$

Que la masa m no pueda escapar significa que dada una posición cualquiera (un r finito), por muy grande que sea $\dot{r}$ (pero finito), siempre existirá un r_{max} finito. Si $\dot{r}$ y r son finitos, entonces E_{MT} es finita y vale siempre lo mismo (es una cantidad conservada). Veamos que para esta E_{MT} finita siempre existe un r_{max}:

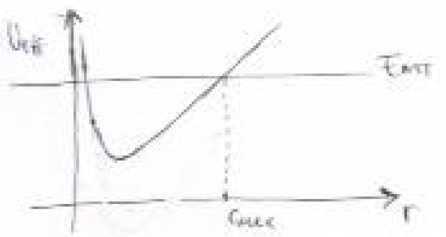
$$E_{MT} = \frac{1}{2}m\cancel{\dot{r}^2}^{\,0} + \frac{l^2}{2mr_{max}^2} + cr_{max} \qquad (\dot{r}(r_{max}) = 0)$$

$$\Rightarrow \quad cr_{max}^3 - E_{MT}r_{max}^2 - \frac{l^2}{2m} = 0 \qquad 1{,}5 \text{ (por toda la explicación)}$$

Este polinomio siempre tiene una raíz (i.e., nuestro r_{max} existe) ya que el polinomio en 0 es negativo $\left(-\frac{l^2}{2m}\right)$ y para valores muy grandes es positivo, luego por el Teorema del Valor Intermedio existe un r_{max} que lo anula (con $0 < r_{max}$).

$\therefore$ La masa no puede escapar.

También es convincente el gráfico:



Para E_{MT} finita siempre existe r_{max}.

(b) $U_{ef}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + cr$ 1,0

$$\frac{dU_{ef}(r)}{dr} = -\frac{l^2}{mr^3} + c \Rightarrow \frac{dU_{ef}}{dr}(r_e) = 0 \Leftrightarrow r_e = \left(\frac{l^2}{mc}\right)^{1/3}$$

$$\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}(r) = \frac{3l^2}{mr^4} \rightarrow \frac{d^2U_{ef}}{dr^2}(r_e) = \frac{3l^2}{m\left(\frac{l^2}{mc}\right)^{4/3}} > 0$$ (r_e es pto. de eq. estable)

Sabemos que un punto de mínimo en $U_{ef}(r)$ representa una órbita circular, luego

$$r_e = r_0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{l^2}{mc}\right)^{1/3} \rightarrow l^2 = mcr_0^3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U_{ef}}{dr^2}(r_0) = \frac{3mcr_0^3}{mr_0^4} = \frac{3c}{r_0}$$

Sabemos:

$$\omega_{pos}^2 = \frac{1}{\alpha}\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}(r_e)$$ en este caso $\alpha = m$, $r_e = r_0$

$$\Rightarrow \omega_{pos}^2 = \frac{1}{m}\frac{3c}{r_0} \Rightarrow T_{pos} = \frac{2\pi}{\omega_{pos}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0}{3c}}$$ 1,0

(c)

La energía antes del impulso. $E_{MT} = \frac{l^2}{2mr_0^2} + cr_0$ ($\dot{r}(r_0) = 0$, pues es órbita circular)

$$E_{MT} = \frac{mcr_0^3}{2mr_0^2} + cr_0 = \frac{1}{2}cr_0 + cr_0 = \frac{3}{2}cr_0$$

Luego del impulso radial, la energía mecánica total cambia, pero el momentum angular no. Para apreciarlo mejor, recordemos que las ecuaciones de movimiento para m son:

$\hat{r}$) $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -c$

$\hat{\theta}$) $m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \rightarrow r^2\dot{\theta} = cte \Rightarrow l = mr^2\dot{\theta} = cte$ 0,5

Como el impulso es radial, $\hat{\theta}$) sigue cumpliéndose $\Rightarrow l = cte$ después del impulso con el mismo valor que tenía antes del impulso. 0,5

La nueva energía mecánica total E_{MT}' cumple que $\dot{r}(2r_0) = 0$, luego:

$$E_{MT}' = \frac{l^2}{2m(2r_0)^2} + c(2r_0) = \frac{mcr_0^3}{2m(2r_0)^2} + c(2r_0) = \frac{1}{8}cr_0 + 2cr_0 = \frac{17}{8}cr_0$$

$$\Rightarrow E_{MT}' - E_{MT} = \frac{17}{8}cr_0 - \frac{3}{2}cr_0 = \frac{17-12}{8}cr_0 = \frac{5}{8}cr_0$$ 1,0