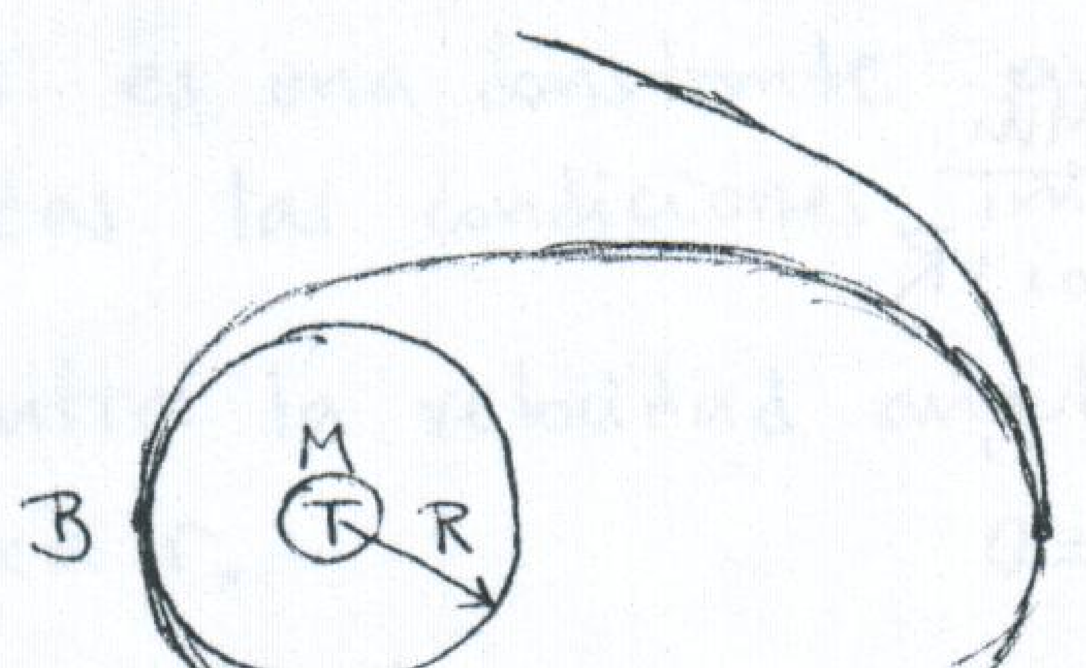
P2| Desde la Tierra se desea lanzar un satélite en órbita parabólica y para ello se procede como sigue. Primero se lo coloca en una órbita circunferencial de radio R. En un punto B de esta órbita dispara sus cohetes tangencialmente y queda en una órbita elíptica cuyo radio mínimo es R. Al alcanzar su radio máximo (punto A) dispara nuevamente en forma tangencial sus cohetes alcanzando la rapidez que obtuvo en B y queda en la órbita parabólica. Se pide determinar:

a) La rapidez del satélite en su órbita circunferencial

b) Excentricidad de la órbita elíptica

c) Velocidades en A y B en el caso de la órbita elíptica.

Los datos son G, M la masa de la Tierra y R.



Sol.:

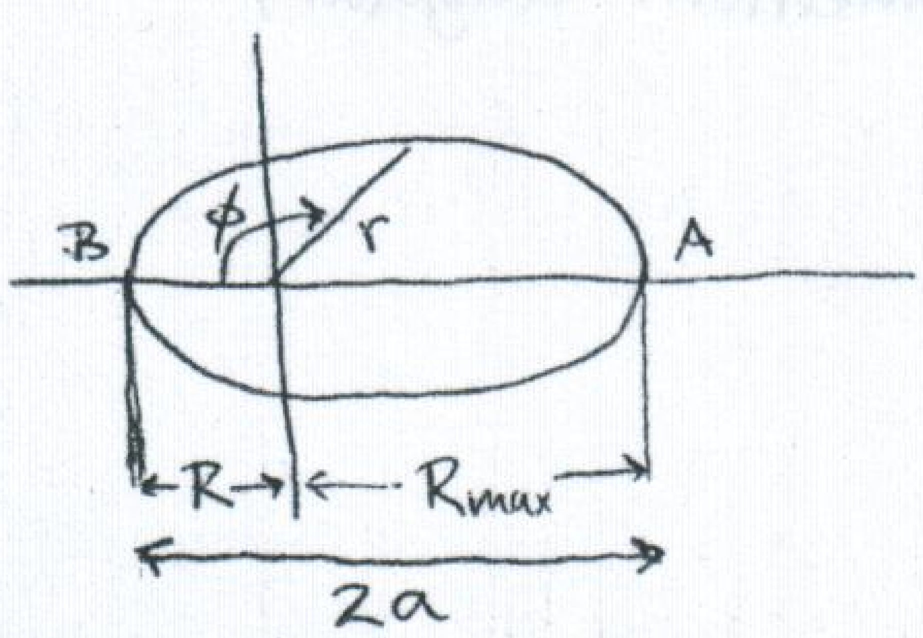
Para un mov. circular de radio R, se tiene:

$$\vec{F}_N = -\frac{GMm}{R^2}\hat{\rho} \quad ; \quad \vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\hat{\rho}\,] \quad -\frac{GMm}{R^2} = -mR\dot{\phi}^2 \quad \wedge \quad \vec{v}_{\odot} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow v_{\odot} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Para la trayectoria elíptica: $r(\phi) = \dfrac{P}{1+e\cos\phi}$



$$\Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{P}{1+e} & (1) \\ R_{max} = \dfrac{P}{1-e} & (2) \end{cases}$$

Además sabemos que la energía está dada por:

$$E = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{R_{max}+R} \quad (3)$$

Para la órbita parabólica nos dicen que:

$$E = 0 = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{GMm}{R_{max}} \quad (4)$$

Evaluando E en B en la (3):

$$\frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R_{max}+R}$$

y usando la (4):

$$\frac{GMm}{R_{max}} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R_{max}+R}$$

$$\Rightarrow R_{max}^2 - R_{max}R - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_{max} = \frac{R}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \frac{R_{max}}{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

(2) ÷ (1):

$$\frac{R_{max}}{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+e}{1-e} \quad \text{(usando (5))}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+3}$$

De (4) y (5):

$$v_B = 2\sqrt{\frac{GM}{R(1+\sqrt{5})}} \quad (6)$$

Recordando que: $m v_B R = m v_A R_{max}$ (conservación momentum angular)

$$v_A = \frac{4}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\frac{GM}{R(1+\sqrt{5})}}$$