LEYES DE KEPLER

Las tres leyes de Kepler son:

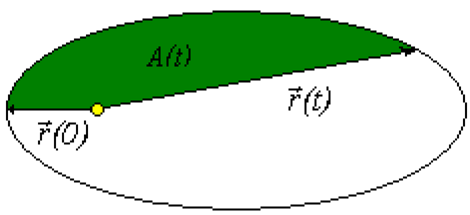
1º Todos los planetas del sistema solar describen trayectorias elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

2º En su movimiento, los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.

3º Para todos los planetas se cumple que el cuadrado del periodo de su órbita es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse que tiene por trayectoria.

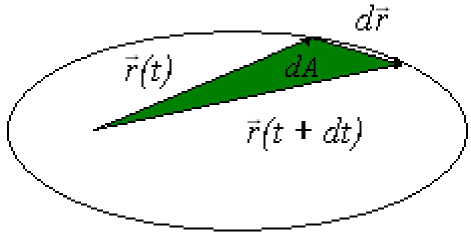
La primera ley ya se demostró en cátedra al deducir la ecuación de la trayectoria de un cuerpo sometido a la fuerza de gravitación de Newton. Las trayectorias posibles son cónicas y para el caso de órbitas acotadas resultan ser elipses.

Para la segunda ley consideremos al foco donde se encuentra el Sol como el origen de nuestro sistema de referencia. Desde allí el vector posición sigue al planeta en su órbita elíptica "barriendo" parte del área de la elipse como se ve en la figura.



Llamando $A(t)$ al área barrida desde la posición inicial $\vec{r}(0)$ (arbitrariamente escogida por nosotros como se observa en la figura) hasta la posición $\vec{r}(t)$, lo que dice la segunda ley de Kepler es que la velocidad con la que el radio vector barre área es constante: $\frac{dA}{dt} = cte$ (esta es la **velocidad areolar**).

Analicemos el diferencial de área dA que barre el radio vector desde $\vec{r}(t)$ hasta $\vec{r}(t+dt)$.



El valor dA es el área del triángulo formado por los tres vectores de la figura, podemos escribir entonces:

$$dA = \frac{1}{2}\left\| \vec{r} \times d\vec{r} \right\|$$

Multiplicando la ecuación por el escalar *1/dt* y amplificando por *m* (la masa del planeta) el miembro derecho

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left\| \vec{r} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

reconociendo en el miembro derecho el momentum angular

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left\| \vec{r} \times \vec{p} \right\| = \frac{1}{2m}\left\| \vec{l} \right\| = \frac{l}{2m}$$

y como el momentum angular es constante y por ende su módulo, vemos que la velocidad areolar es constante.

La demostración de la tercera ley hace uso de la segunda ley que acabamos de demostrar:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2m}$$

Integrando sobre toda el área:

$$\int_0^{A_{total}} dA = \frac{l}{2m}\int_0^T dt$$

El área total corresponde al área de la elipse cuyo valor es πab donde a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente de la elipse. El tiempo T es el tiempo que tarda el radio vector en barrer toda el área de la elipse, es decir, es el tiempo que le toma en completar una vuelta a la elipse que por definición es el periodo. La ecuación anterior queda:

$$\pi ab = \frac{l}{2m}T$$

despejando T y elevando al cuadrado

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m^2}{l^2}$$

De la geometría de la elipse se sabe que:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (ae)^2 = a^2(1 - e^2)$$

reemplazando en la ecuación anterior se obtiene

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{a(1 - e^2)m^2}{l^2}$$

La ecuación de la trayectoria en polares se puede escribir de las siguientes dos formas para el caso de una elipse:

$$r(\phi) = \frac{\frac{l^2}{GMm^2}}{1 + e\cos\phi}$$

$$r(\phi) = R_{min} \frac{1+e}{1+e\cos\phi} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$$

M es la masa del Sol. De estas dos ecuaciones se desprende que

$$\frac{1}{GM} = \frac{a(1-e^2)m^2}{l^2}$$

Obtenemos así lo siguiente:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$$

el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor y la constante de proporcionalidad depende de la masa del cuerpo que está en el foco, en este caso del Sol.