- (a) Estime el tiempo que tardaría una persona en dar la vuelta caminando a la Tierra. ¿Y en auto?
- (b) Averigüe, calcule o mida:
- La velocidad del sonido en el aire
 - La velocidad de una hormiga
 - El número de segundos en un año
 - El diámetro de un virus
 - El volumen y la masa de un auto
 - La distancia de la tierra al sol
- (c) Usando alguna expresión conocida en que aparezca la magnitud pedida (por ejemplo, usando $F = ma$ para la fuerza), determine o las dimensiones de
- La presión
 - La energía
- (d) Muestre que la famosa relación de Einstein $E = mc^2$ es dimensionalmente correcta.
- (e) Se sabe que cuando un objeto cae debido a la gravedad y el roce **no** es despreciable, al cabo de un tiempo el objeto alcanza una *velocidad terminal* y ya no acelera más. La velocidad terminal está dada por

$$V = Cmg$$

donde m es la masa del objeto, g la aceleración de gravedad y C una constante que depende de la forma del cuerpo y de las propiedades del medio en el cual cae (aire o agua, por ejemplo).

- Determine la dimensión de C .
- Obtenga una expresión simple para el tiempo que tarda el objeto en alcanzar la velocidad terminal, sabiendo que también depende de m , g y C .

- (f) La Ley de Gravitación Universal de Newton dice que la fuerza de atracción entre dos objetos de masas m_1 y m_2 , separados a una distancia R es

$$F = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

- Determine la dimensión de G
- La Relatividad General predice que si una estrella de masa M es suficientemente masiva terminará colapsando en un agujero negro. Encuentre una expresión simple para el radio del agujero negro que resulta del colapso de una estrella, si se sabe que el valor del radio depende de la masa de la estrella, de la constante de gravitación universal y de la velocidad de la luz c .
- A partir de la expresión anterior determine el orden de magnitud del radio del agujero negro que resultaría del colapso del Sol.

Datos:

- Masa del Sol: 2×10^{30} kg
- Velocidad de la luz: $c = 299792$ m/s
- Constante de gravitación universal: $G = 6,6742 \times 10^{-11}$ xxxx (las xxxx corresponden a las unidades SI de G , que Uds deben determinar).

- (g) Por un tubo vertical de radio R puede fluir agua debido a la fuerza de gravedad. Se sabe experimentalmente que el agua se frena debido al roce, el cual está caracterizado por una propiedad intrínseca del agua llamada *viscosidad* η . A mayor viscosidad, se tiene mayor roce. La dimensión de la viscosidad es $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$.

Se desea encontrar una expresión simple para el caudal Q de agua que fluye por el tubo, definido como el volumen de agua por unidad de tiempo.

Haciendo experimentos bajo distintas condiciones se encontró que el caudal es **directamente proporcional** a la aceleración de gravedad g .

- Mediante análisis dimensional y usando el resultado experimental antes indicado, encuentre una expresión simple para el caudal en función del radio, la viscosidad, la aceleración de gravedad y la densidad del agua ρ , del tipo

$$Q = f R^a \eta^b g^c \rho^d$$

donde f es una constante adimensional.

- ¿Son razonables los signos (positivos o negativos) de los exponentes a , b , c y d ? Comente sobre cada uno de ellos.

Solución:

Se dice que el caudal está dado por

$$Q = f R^a \eta^b g^c \rho^d$$

y se deben encontrar los exponentes a , b , c y d .

Primero, se dice que Q es **directamente proporcional** a g , de manera que el exponente asociado a g es 1. Es decir,

$$c = 1$$

y la expresión queda

$$Q = f R^a \eta^b g \rho^d$$

Ahora, tomamos dimensiones a la izquierda y a la derecha. El caudal está definido como volumen por unidad de tiempo de manera que $[Q] = L^3 T^{-1}$. Luego, al tomar dimensiones, se obtiene

$$L^3 T^{-1} = L^a (ML^{-1} T^{-1})^b (LT^{-2}) (ML^{-3})^d$$

expandiendo

$$L^3 T^{-1} M^0 = L^{(a-b+1-3d)} M^{(b+d)} T^{(-b-2)}$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$L: \quad 3 = a - b + 1 - 3d$$

$$T: \quad -1 = -b - 2$$

$$M: \quad 0 = b + d$$

La ecuación más fácil es la asociada a T , de la que se obtiene

$$b = -1$$

Reemplazando en la ecuación para M se obtiene

$$d = 1$$

y finalmente en la ecuación para L

$$a = 4$$

Entonces, el resultado final es

$$Q = f R^4 g \rho / \eta$$

El signo de los exponentes es el esperado porque el caudal crece con el radio ($a > 0$), como el flujo es debido a la gravedad, un fluido más denso cae más rápido ($d > 0$) y un fluido con mayor roce cae más lentamente ($\eta < 0$).

Resolviendo las ecuaciones de dinámica de fluidos (se ven en sexto semestre) se puede determinar la constante f que resulta ser

$$f = \pi/8$$