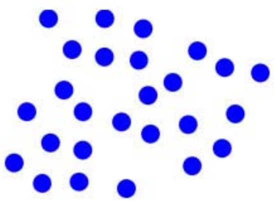
SISTEMA DE PARTICULAS



N partículas

CENTRO DE MASA $\quad \vec{x}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i$

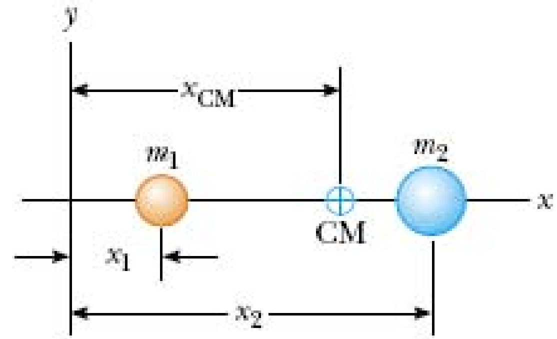
CON $\quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ = masa total del sistema

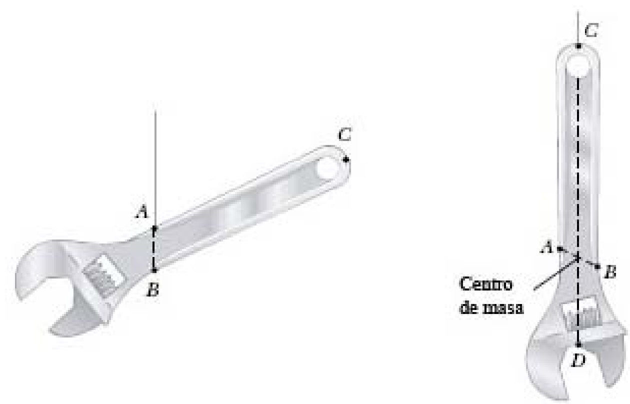
LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA ESTÁ DADA POR

$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{\Delta \vec{x}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{x}_i}{\Delta t}$$

$m_i = cte \quad \Rightarrow \quad M = cte$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$





EQUIVALENTEMENTE

$$\underbrace{M\vec{v}_{cm}}_{\vec{P}_{cm}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{P}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i$$

LA ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASA ESTÁ DADA POR

$$\vec{a}_{cm} \equiv \frac{\Delta \vec{v}_{cm}}{\Delta t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

DONDE $\vec{F}_i$ ES LA FUERZA TOTAL QUE ACTÚA SOBRE LA PARTÍCULA i-ÉSIMA

$\vec{F}_i$: INCLUYE TODAS LAS FUERZAS EXTERNAS QUE ACTÚAN SOBRE LA PARTÍCULA i-ÉSIMA ASÍ COMO TAMBIÉN LA SUMA DE LAS FUERZAS INTERNAS QUE LAS OTRAS PARTÍCULAS EJERCEN SOBRE LA PARTÍCULA i-ÉSIMA

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,int} + \vec{F}_i^{\,ext}$$

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{\,ext}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \left\{ \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{21} + \dots \right\}$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext}$$

SI LAS FUERZAS ENTRE PARTÍCULAS SATISFACEN LA 3ª LEY DE NEWTON (POR EJEMPLO, FUERZAS DE CONTACTO, FZAS. GRAVITACIONALES) SE TIENE QUE

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

FZA. QUE EJERCE LA PARTÍCULA j SOBRE LA PARTÍCULA i-ÉSIMA = FZA. QUE EJERCE LA PARTÍCULA i SOBRE LA PARTÍCULA j-ÉSIMA

ENTONCES

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\left\{ \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{0} + \underbrace{\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}}_{0} + \cdots \right\} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext}}$$

MOMENTUM LINEAL DEL SISTEMA

$$\vec{P}_{TOTAL} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_N$$

$$\vec{P}_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{P}_{TOTAL} = M \vec{v}_{CM}}$$

EL MOMENTUM LINEAL TOTAL DEL SISTEMA ES IGUAL A LA VELOCIDAD DEL CM POR LA MASA TOTAL DEL SISTEMA

$$\frac{\Delta \vec{P}_{TOTAL}}{\Delta t} = M \frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = M \vec{a}_{CM}$$

$$\frac{\Delta \vec{P}_{TOTAL}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$$

$$\text{si } \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta \vec{P}_{TOTAL}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cte$$

Si $M = cte \Rightarrow$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$$

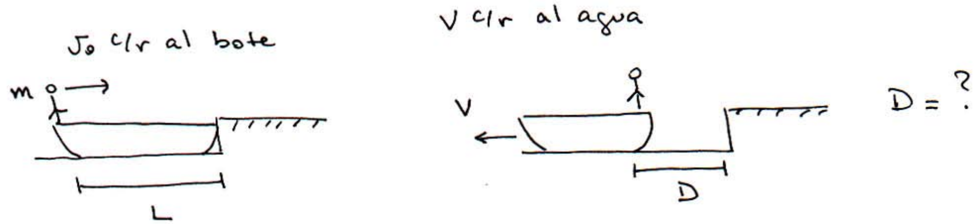
SI LA FUERZA EXTERNA TOTAL ES CERO

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

POR LO TANTO, EL CENTRO DE MASA SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE.

EL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS PUEDE SER ANALIZADO USANDO LAS LEYES DE NEWTON COMO SI TODA LA MASA ESTUVIERA CONCENTRADA EN EL CENTRO DE MASA Y LA FUERZA TOTAL (SUMA DE LAS FUERZAS EXTERNAS) ESTUVIERA APLICADA EN ESE PUNTO (EL CUAL PUEDE NO COINCIDIR CON UNA PARTÍCULA DEL SISTEMA)

EJEMPLO



$P_{CM} = 0$ (DESPRECIAMOS LA FZA. DE ARRASTRE DEL AGUA)

$$P_{cm} = m(v_0 - V) - MV = 0$$

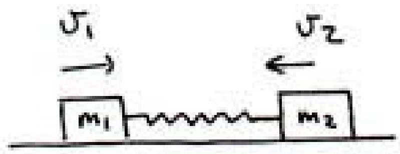
$$\Rightarrow \quad V = \frac{m}{M+m} v_0 = cte$$

ENTONCES

$D = VT$ DONDE T ES EL TIEMPO QUE DEMORA EL PESCADOR EN RECORRER EL LARGO DEL BOTE $T = \frac{L}{v_0}$

$$\therefore \quad D = \frac{m}{M+m} v_0 \cdot \frac{L}{v_0} = \frac{m}{M+m} \cdot L$$ ← NO DEPENDE DE v_0

EJEMPLO



DOS BLOQUES INICIALMENTE EN REPOSO ESTÁN UNIDOS POR UN RESORTE COMPRIMIDO

¿CUÁL ES LA FRACCIÓN DE ENERGÍA CINÉTICA DE CADA UNO DE LOS BLOQUES DESPUÉS QUE SE SUELTAN?

$$P_i = 0 \qquad P_f = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE CADA BLOQUE

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \frac{v_2^2}{v_1^2} \right\}$$

PERO $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ENTONCES

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left\{ 1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right\}$$

$$T = T_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \Rightarrow f_1 = \frac{T_1}{T} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

ANALOGAMENTE

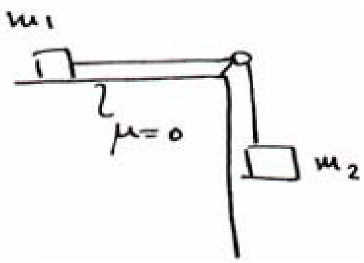
$$T = T_2 \left\{ 1 + \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1^2}{v_2^2} \right\}$$

PERO $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$ $\Rightarrow$ $T = T_2 \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1} \right)$

$$\therefore \quad f_2 = \frac{T_2}{T} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

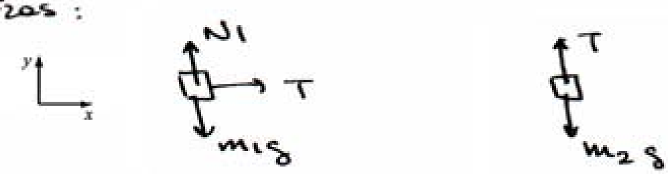
EL BLOQUE DE MASA MAYOR RECIBE MENOS ENERGÍA CINÉTICA QUE EL DE MENOR MASA

Ejemplo



$a = ?$

Fzas :



y) $N_1 - m_1 g = 0$ $\qquad T - m_2 g = -m_2 a$

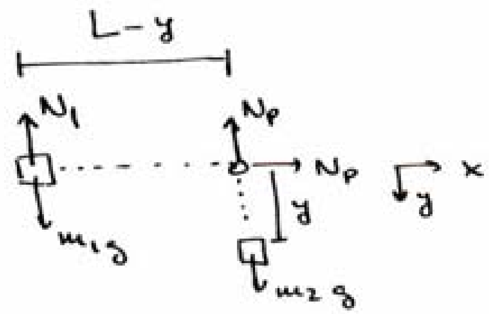
x) $T = m_1 a$

$$\Rightarrow \quad m_1 a - m_2 g = -m_2 a$$

$$(m_1 + m_2) a = m_2 g$$

$$\boxed{a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g}$$

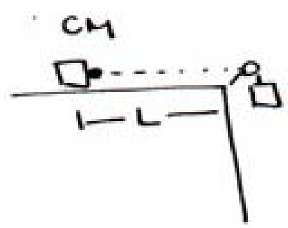
CM:



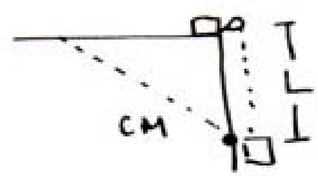
$$x_{CM} = -\frac{m_1}{M}(L-y)$$

$$y_{CM} = \frac{m_2}{M}\,y \qquad M = m_1 + m_2$$

$y = 0$



$y = L$



$$\Rightarrow \quad a_{CM_x} = \frac{m_1}{M}\,a \qquad a_{CM_y} = \frac{m_2}{M}\,a$$

Ec. de Newton para el CM

x) $N_p = M a_{CM_x} = m_1 a$

y) $m_1 g - N_1 + m_2 g - N_p = M a_{CM_y} = m_2 a$

$\Rightarrow \quad m_1 g - N_1 + m_2 g - m_1 a = m a$

pero $N_1 = m_1 g$

$\Rightarrow \quad a(m_1 + m_2) = m_2 g$

$$a = \frac{m_2}{M} g$$

Posición CM

$$x_{CM} = -\frac{m_1}{M} L + \frac{m_1}{M} y \qquad y_{CM} = \frac{m_2}{M} y$$

pero $y = \frac{1}{2}at^2$ entonces

$$x_{CM} = -\frac{m_1}{M}L + \frac{m_1}{M}\frac{1}{2}at^2$$

$$y_{CM} = \frac{m_2}{M}\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 = \frac{M}{m_2}y_{CM}$$

$$\Rightarrow x_{CM} = -\frac{m_1}{M}L + \frac{m_1}{\cancel{M}}\frac{\cancel{M}}{m_2}y_{CM}$$

$$y_{CM} = \frac{m_2}{m_1}\left[x_{CM} + \frac{m_1}{M}L\right]$$

en $t=0$ $x_{CM} = -\frac{m_1}{M}L \Rightarrow y_{CM} = 0$

al final $x_{CM} = 0 \Rightarrow y_{CM} = \frac{m_2}{M}L$