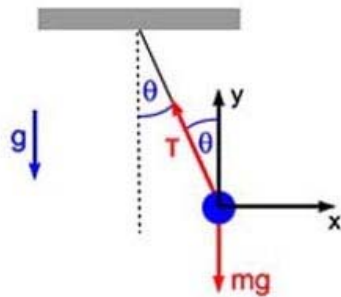
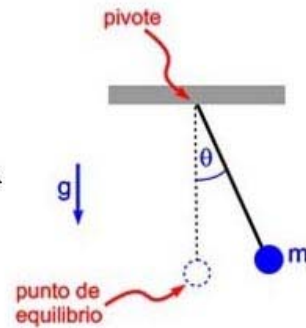


PÉNDULO SIMPLE

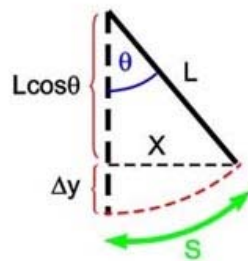
UN PÉNDULO SIMPLE CONSISTE DE UNA MASA m UNIDA A UNA CUERDA IDEAL DE LARGO L



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON

$$\hat{x}) -T \sin \theta = m a_x$$

$$\hat{y}) T \cos \theta - m g = m a_y$$



PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS $\theta \ll 1$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{y} \quad \sin \theta \approx \theta$$

ENTONCES

$$\sin \theta = \frac{x}{L} \Rightarrow \theta \approx \frac{x}{L} \approx \frac{s}{L}$$

VELOCIDAD TANGENCIAL $v_t = \frac{\Delta s}{\Delta t} = L \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = L\omega$

ACELERACIÓN TANGENCIAL $a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = L \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = L\alpha$

PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS $\theta \ll 1$

$$\Delta y = L - L \cos \theta$$

$$\Delta y = L(1 - \cos \theta) \approx L \frac{\theta^2}{2} \ll 1 \quad \therefore \quad a_y \approx 0$$

POR OTRO LADO $a_x \approx a_t$

LAS ELS. DE MOVIMIENTO QUEDAN

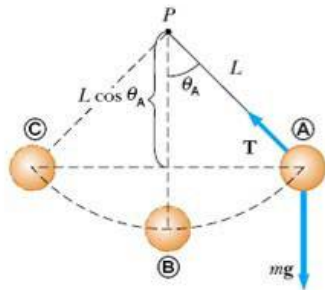
$$\hat{x}) \quad -T\theta = ma_t$$

$$\hat{y}) \quad T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$$

$$\therefore \quad -mg\theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta} \quad (\text{M.A.S.})$$

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA: COMO LA TENSIÓN ES SIEMPRE PERPENDICULAR A LA TRAYECTORIA DE LA MASA m NO EFECTÚA TRABAJO. LA ÚNICA FUERZA QUE EFECTÚA TRABAJO ES LA FUERZA GRAVITACIONAL



$$\Rightarrow \Delta E = 0$$

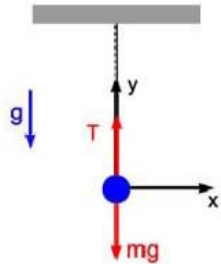
$$\begin{aligned} \text{ENERGÍA EN EL PUNTO A} &= \cancel{K_A} + U_A \\ &= -mgL \cos \theta_A \end{aligned}$$

$$\text{ENERGÍA EN EL PUNTO B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - mgL$$

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - mgL = -mgL \cos \theta_A$$

$$v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_A)}$$

LA TENSION EN EL PUNTO B ESTÁ DADA POR

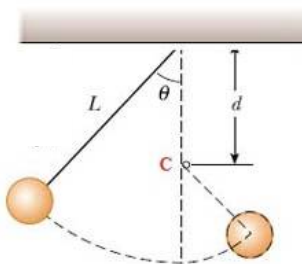


$$4) \quad T_B - mg = m \frac{v_B^2}{L}$$

$$T_B = mg(3 - 2\cos\theta_A)$$

EJEMPLO:

SI EL PÉNDULO ES SOLTADO DESDE UNA POSICIÓN HORIZONTAL ($\theta = 90^\circ$), ¿CUÁL ES EL VALOR MÍNIMO DE d PARA QUE PUEDA DAR UNA VUELTA COMPLETA EN TORNO A LA CLAVIJETA C?



$$\text{ENERGÍA INICIAL} = 0$$

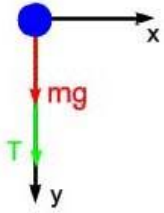
$$\text{ENERGÍA FINAL} = \frac{1}{2} m v_B^2 - mg y_B$$

$$\text{PERO } y_B + 2(L - d) = L$$

$$\Rightarrow y_B = 2d - L$$

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - mg(2d - L) = 0$$

EN EL PUNTO MAS ALTO



$$T + mg = m \frac{v^2}{L-d}$$

CASO EXTREMO : $T = 0$

$$\therefore v_{\min}^2 = g(L-d)$$

ENTONCES $\frac{1}{2} m g (L-d) - m g (2d-L) = 0$

$$\therefore \boxed{d \geq \frac{3}{5} L}$$

Conservación de momentum lineal

Un karateca experto se entrena para aumentar la fortaleza de sus músculos y engrosar los huesos de sus manos. Esto le permite quebrar varios pastelones de concreto de un solo golpe. Aunque un karateca novato no puede realizar esta hazaña, si puede quebrar fácilmente una pila de tablas de madera. En la foto, Tom Casiani, un estudiante del Dickinson College, quiebra nueve tablas de $\frac{3}{4}$ " a pesar de que nunca ha practicado kárate antes de estudiar física.



¿Cómo pudo quebrar las tablas sin dañar su mano?

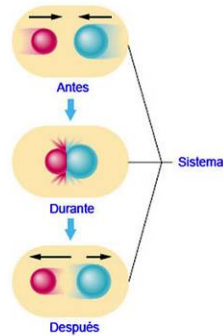


CHOQUES (EXPLOSIONES)

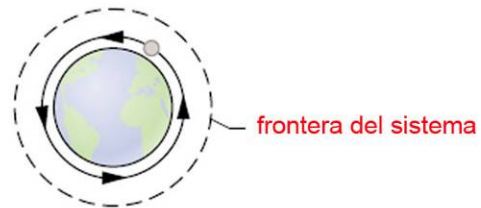
UN CHOQUE (EXPLOSIÓN) ES UN EVENTO AISLADO EN EL CUAL DOS O MAS CUERPOS EJERCEN FUERTAS ENTRE SI RELATIVAMENTE FUERTES EN UN INTERVALO DE TIEMPO CORTO COMPARADO CON EL TIEMPO QUE DURA SU MOVIMIENTO TOTAL



PARA ANALIZAR EL CHOQUE
SE DISTINGUEN 3 FASES



UN SISTEMA AISLADO ES UNA COLECCIÓN DE PARTÍCULAS
QUE PUEDEN INTERACTUAR UNAS CON OTRAS PERO CUYA
INTERACCIÓN CON EL MEDIO EXTERIOR TIENE UN EFECTO
DESPRECIABLE SOBRE SUS MOMIENTOS



MOMENTUM PARA UN SISTEMA DE PARTICULAS

CONSIDEREMOS UN SISTEMA DE N PARTICULAS DE MASA m_i
QUE SE MUEVEN CON VELOCIDAD $\vec{v}_i$. EL MOMENTUM TOTAL
DEL SISTEMA ES

$$\vec{p}_{\text{sistema}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$$

ENTONCES

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_N}{dt}$$

APLICANDO LA SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA CADA
PARTICULA

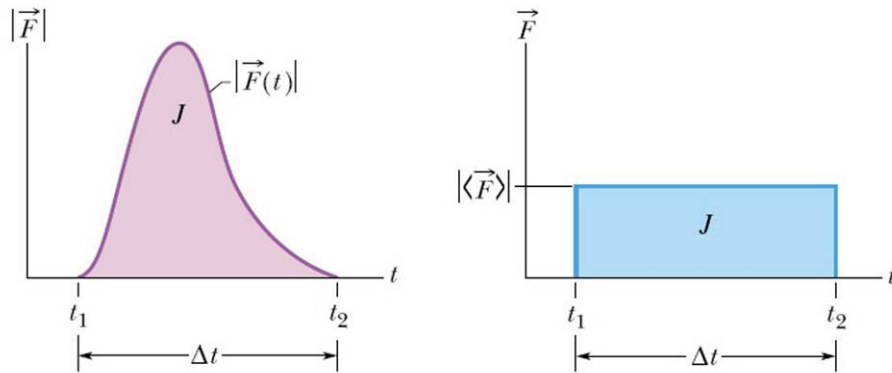
$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = \vec{F}_1^{\text{neta}} + \vec{F}_2^{\text{neta}} + \dots + \vec{F}_N^{\text{neta}}$$

POR LO TANTO

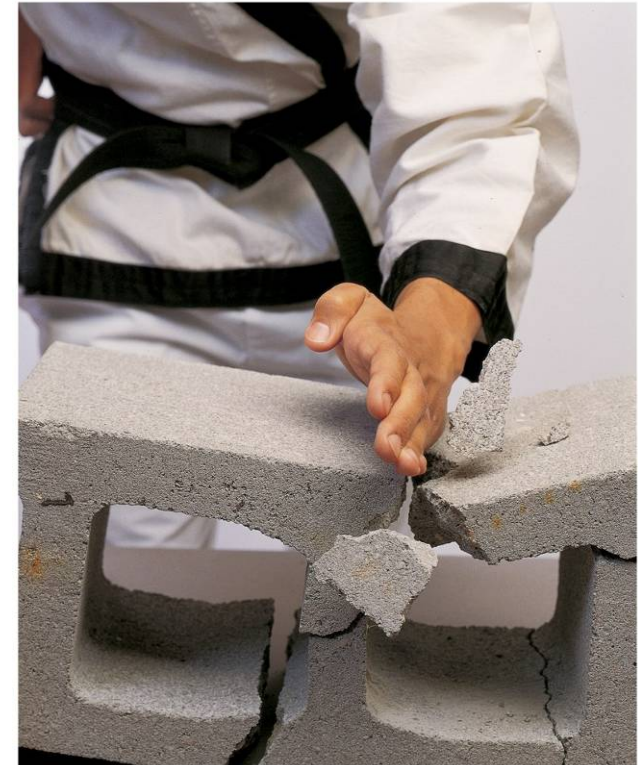
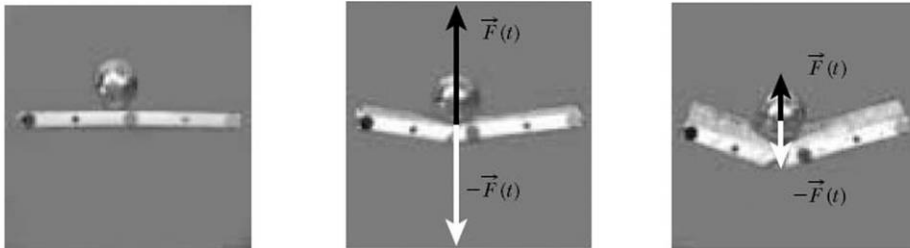
$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = \underbrace{\vec{F}_{\text{sistema}}^{\text{neta}}}$$

INCLUYE TODAS LAS FUERZAS
EXTERNAS E INTERNAS QUE
ACTÚAN SOBRE EL SISTEMA

IMPULSO Y CAMBIO DE MOMENTUM



$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{neta}(t) dt = \langle \vec{F}^{neta} \rangle \Delta t$$



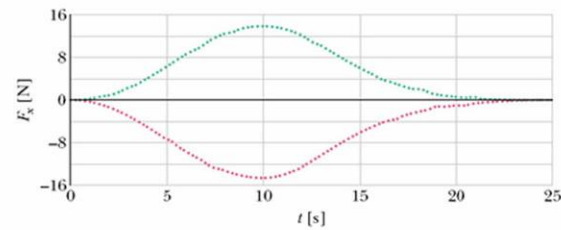
CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

EN UN SISTEMA AISLADO $\vec{F}_{\text{neta}} = 0$, POR LO TANTO

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sistema}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{sistema}} = \text{cte}$$

ES DECIR, EL MOMENTUM LINEAL TOTAL ES CONSERVADO

LAS PARTÍCULAS PUEDEN CAMBIAR SU MOMENTUM PERO
LO HACEN DE MANERA TAL QUE EL MOMENTUM TOTAL
ES CONSTANTE



CHOQUES

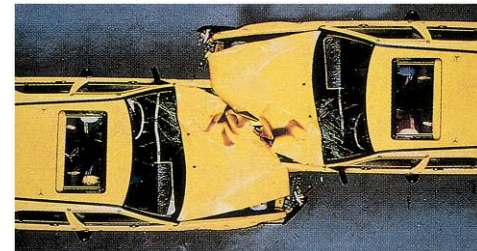
CHOQUE ELÁSTICO

- CONSERVACIÓN DE ENERGÍA
- CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

CHOQUE INELÁSTICO

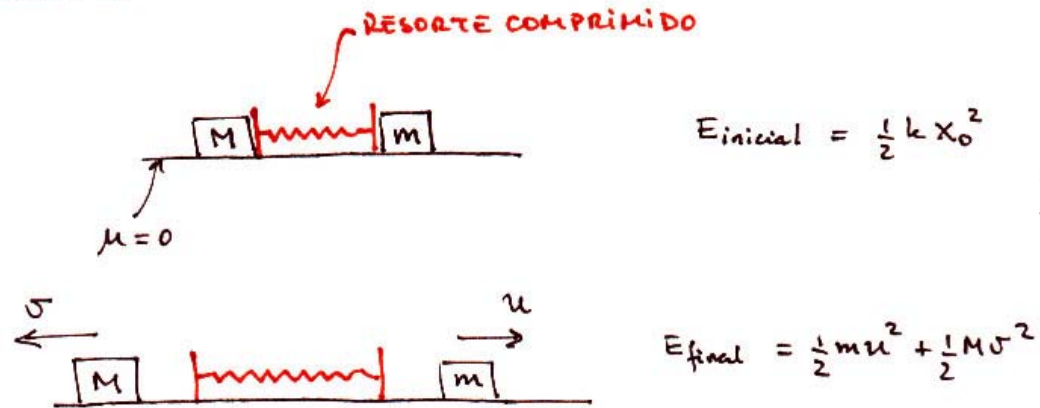
- CONSERVACIÓN DE MOMENTUM
- NO SE CONSERVA LA ENERGÍA

CONSERVACIÓN DE MOMENTUM PROVIENE DE LA 2ª Y 3ª
LEYES DE NEWTON



CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

EJEMPLO

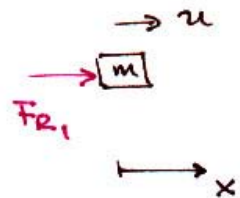


CONS. DE ENERGÍA $\Rightarrow E_i = E_f$

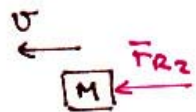
$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

¡DOS INCÓGNITAS u Y v PERO SOLO UNA ECUACIÓN!

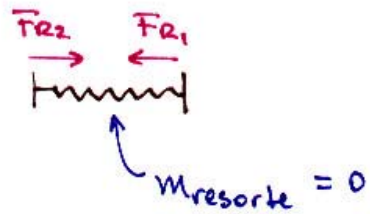
SIN EMBARGO, USANDO LA 2ª Y 3ª LEY DE NEWTON PARA
 AMBAS MASAS Y EL RESORTE SE TIENE



$$m \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \vec{F}_{R1} \quad (1)$$



$$-M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\vec{F}_{R2} \quad (2)$$



$$0 = \vec{F}_{R2} - \vec{F}_{R1}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{R2} = \vec{F}_{R1}$$

ENTONCES DE (1) Y (2) SE TIENE

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = M \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$m \Delta u = M \Delta v$$

$$m(u_f - u_i) = M(v_f - v_i)$$

$$mu_f - Mv_f = mu_i - Mv_i$$

$\Rightarrow$

$$mu - Mv = \text{CONSTANTE}$$

CONSERVACIÓN
DE
MOMENTUM

USANDO VECTORES, ESTA LEY DE CONSERVACIÓN SE
PUEDE ESCRIBIR

$$m\vec{u} + M\vec{v} = \text{CTE.}$$

LA LEY DE CONSERVACIÓN DE MOMENTUM ES VÁLIDA
SIEMPRE QUE NO EXISTAN FUERZAS EXTERNAS
ACTUANDO SOBRE EL SISTEMA.

EN GENERAL, LA LEY DE CONSERVACIÓN DE MOMENTUM
ESTÁ DADA POR

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{cte.}$$

VOLVAMOS A NUESTRO PROBLEMA. AHORA TENEMOS
DOS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m u^2$$

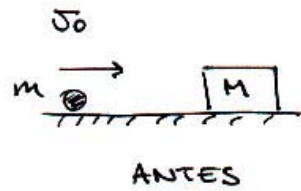
$$m u - M v = 0 \Rightarrow u = \frac{M}{m} v$$

ENTONCES

$$k x_0^2 = M v^2 + m \left(\frac{M v}{m} \right)^2$$

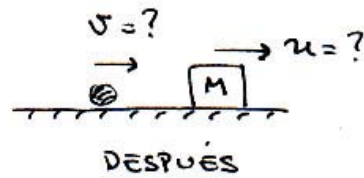
$$v = x_0 \sqrt{\frac{k m}{M(m+M)}} \Rightarrow u = x_0 \sqrt{\frac{k M}{m(m+M)}}$$

EJEMPLO CHOQUE ELÁSTICO



$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$P_{\text{inicial}} = m v_0$$



$$E_{\text{final}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M u^2$$

$$P_{\text{final}} = m v + M u$$

$$P_i = P_f \Rightarrow m v_0 = m v + M u$$

$$v = v_0 - \frac{M}{m} u$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(v_0 - \frac{M}{m} u \right)^2 + \frac{1}{2} M u^2$$

$$\cancel{m v_0^2} = m \left(\cancel{v_0^2} - 2 \frac{M}{m} u v_0 + \frac{M^2}{m^2} u^2 \right) + M u^2$$

$$0 = M u^2 - 2 M v_0 u + \frac{M^2}{m} u^2$$

$$0 = u \left[\left(1 + \frac{M}{m} \right) u - 2 v_0 \right]$$

$$u \neq 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{M}{m} \right) u = 2 v_0$$

$$u = \frac{2 v_0}{1 + M/m}$$

ENTONCES

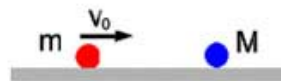
$$v = v_0 - \frac{M}{m} \frac{2 v_0}{1 + M/m} \Rightarrow v = v_0 \left(\frac{1 - M/m}{1 + M/m} \right)$$

$$\text{Si } M = m \Rightarrow v = 0 \text{ y } u = v_0$$

CHOQUE COMPLETAMENTE INELÁSTICO

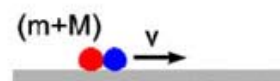
EJEMPLO

ANTES



$$P_{\text{inicial}} = m v_0$$

DESPUÉS



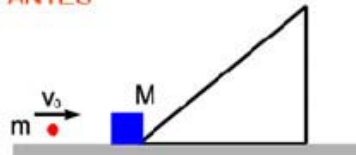
$$P_{\text{final}} = (m+M) v$$

$$P_i = P_f \Rightarrow m v_0 = (m+M) v$$

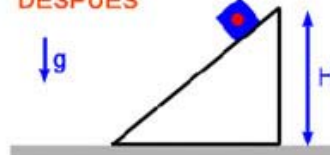
$$v = \frac{m}{m+M} v_0$$

OTRO EJEMPLO

ANTES



DESPUÉS



DETERMINAR v_0 PARA QUE EL BLOQUE + BALA ALCANCEN UNA ALTURA H

CHOQUE COMPLETAMENTE INELÁSTICO $\Rightarrow$ $\underbrace{P_i}_{m v_0} = \underbrace{P_f}_{(m+M) v}$

$$v = \frac{m}{M+m} v_0$$

DESPUÉS DEL CHOQUE

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} (m+M) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v_0^2$$

$$E_{\text{final}} = (m+M) g H$$

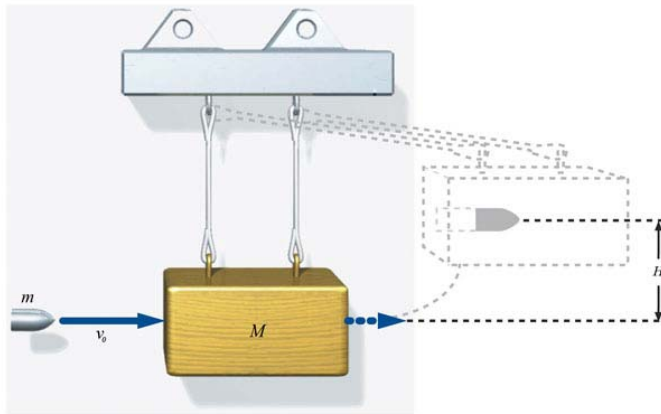
CONS. DE ENERGÍA $\Rightarrow E_i = E_f$

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v_0^2 = (m+M) g H$$

$$v_0^2 = 2 g H \frac{(m+M)^2}{m^2}$$

$$v_0 = \left(\frac{M+m}{m} \right) \sqrt{2 g H}$$

PÉNDULO BALÍSTICO



DETERMINAR v_0 PARA QUE EL BLOQUE SUBA HASTA UNA ALTURA H

CONS. DE MOMENTUM $m v_0 = (m + M) v$

$$v = \frac{m}{M+m} v_0$$

DESPUÉS DEL CHOQUE, EL PÉNDULO CONSERVA ENERGÍA

$$\frac{1}{2} \cancel{(m+M)} v^2 = \cancel{(M+m)} g H$$

$$v = \sqrt{2 g H} \Rightarrow v_0 = \left(\frac{M+m}{m} \right) \sqrt{2 g H}$$

CHOQUE ELÁSTICO : CASO GENERAL



$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

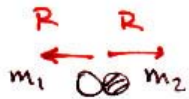
$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

COLISIÓN ELÁSTICA $\Rightarrow P_i = P_f$

$$E_i = E_f$$

CONS. DE MOMENTUM



$$m_1 a_1 = -R$$

$$m_2 a_2 = R$$

DURANTE EL
CHOQUE

$$\Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

PERO $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ENTONCES

$$m_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = 0$$

$$m_1 (v_{1f} - v_{1i}) + m_2 (v_{2f} - v_{2i}) = 0$$

$$\underbrace{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}_{P_i} = \underbrace{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}_{P_f}$$

VOLVIENDO A NUESTRO PROBLEMA

$$P_i = P_f \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \quad (*)$$

$$E_i = E_f \Rightarrow m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

USANDO ④ SE TIENE

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$\underbrace{v_{1i} - v_{2i}}_{\text{VELOCIDAD RELATIVA DE ACERCAMIENTO ANTES DEL CHOQUE}} = - \underbrace{(v_{1f} - v_{2f})}_{\text{VELOCIDAD RELATIVA DESPUÉS DEL CHOQUE}}$$

VELOCIDAD
RELATIVA DE
ACERCAMIENTO
ANTES DEL CHOQUE

VELOCIDAD
RELATIVA
DESPUÉS DEL CHOQUE

USANDO ESTA ECUACIÓN Y ③ SE PUEDE OBTENER v_{1f}
Y v_{2f} EN TÉRMINOS DE LAS VELOCIDADES INICIALES

$$v_{1i} - v_{2i} = - (v_{1f} - v_{2f})$$

$$\Rightarrow v_{2f} = v_{1i} - v_{2i} + v_{1f}$$

REEMPLAZANDO EN ③

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{1i} - v_{2i} + v_{1f} - v_{2i})$$

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i} + 2m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{1f}$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

ANALOGAMENTE

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

CASOS ESPECIALES

i) $m_1 = m_2 \Rightarrow$

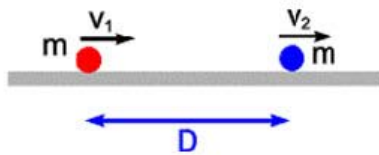
$$\left. \begin{aligned} v_{1f} &= v_{2i} \\ v_{2f} &= v_{1i} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{LAS PARTÍCULAS} \\ \text{INTERCAMBIAN} \\ \text{VELOCIDADES} \end{array}$$

ii) $v_{2i} = 0 \Rightarrow$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

CHOQUE DE 2 MASAS IDÉNTICAS EN 1-DIM

$t=0$



$$x_1(t) = v_1 t$$

$$x_2(t) = D + v_2 t$$

COLISIÓN $\Rightarrow x_1(t_c) = x_2(t_c)$

$$v_1 t_c = D + v_2 t_c$$

$$t_c = \frac{D}{v_1 - v_2}$$

LA COLISIÓN OCURRE SI $t_c \geq 0 \Rightarrow v_1 > v_2$

SI $v_1 = v_2 \Rightarrow t_c \rightarrow \infty$ i.e. LA COLISIÓN NUNCA OCURRE

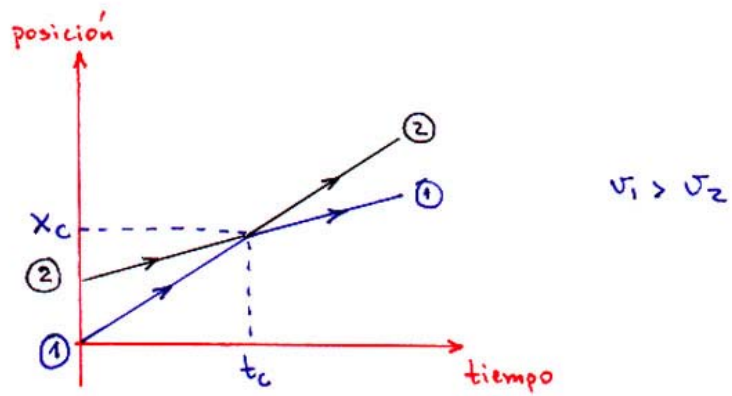
PUNTO DE COLISIÓN : $x_c = x_1(t_c) = x_2(t_c)$

$$\Rightarrow x_c = \frac{v_1 D}{v_1 - v_2}$$

VELOCIDADES DESPUÉS DEL CHOQUE :

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v_2 \\ v_{2f} &= v_1 \end{aligned} \Rightarrow \text{LAS VELOCIDADES SE INTERCAMBIAN} \Rightarrow \text{LAS PARTÍCULAS PARECEN TRASPASARSE}$$

ANÁLISIS GRÁFICO

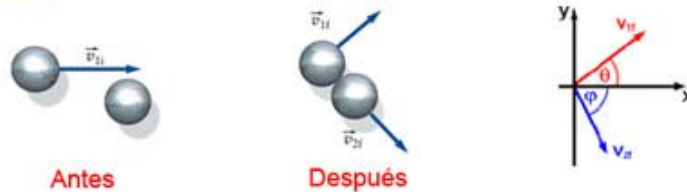


COLISIONES EN 2D Y 3D

CHOQUE ELÁSTICO $\Rightarrow E_i = E_f$ y $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

CHOQUE INELÁSTICO $\Rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$

EJEMPLO:



CHOQUE ELÁSTICO

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow x) m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \varphi$$

$$y) 0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \varphi$$

¡¡ TENEMOS 4 INCÓGNITAS ($\theta, \varphi, v_{1f}, v_{2f}$) PERO SÓLO 3 ECUACIONES !!

$\Rightarrow$ HAY QUE MEDIR ALGUNA DE ESTAS CANTIDADES

POR EJEMPLO, SUPONGAMOS QUE v_{if} ES CONOCIDA.
ENTONCES

$$m_1 v_{ii} - m_1 v_{if} \cos \theta = m_2 v_{2f} \cos \varphi$$

$$m_1 v_{if} \sin \theta = m_2 v_{2f} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 v_{if} \sin \theta}{m_1 v_{ii} - m_1 v_{if} \cos \theta} = \frac{m_2 v_{2f} \sin \varphi}{m_2 v_{2f} \cos \varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{v_{if} \sin \theta}{v_{ii} - v_{if} \cos \theta}$$