

Energía Potencial y Conservación de Energía

Los habitantes prehistóricos de la Isla de Pascua esculpieron cientos de estatuas de piedra (moais) en las laderas de sus volcanes y luego las movieron a diferentes sitios alrededor de toda la isla. La forma cómo ellos pudieron mover estas gigantescas estatuas tanto como 10 km sin la ayuda de maquinas sofisticadas ha sido un tema de amplio debate, con muchas delirantes teorías acerca de la fuente de la energía empleada.



¿Cómo pudo ser realizada esta tarea usando sólo medios primitivos?



FUERZAS CONSERVATIVAS

EJEMPLOS

RESORTE $W_R = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$

$-d \quad x=0 \quad d$

$W_R = 0 - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2$

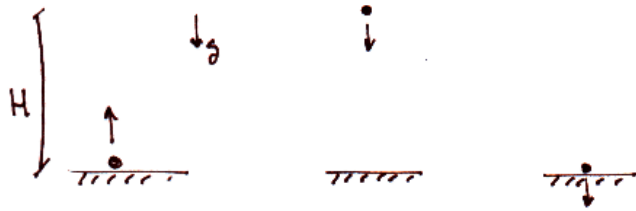
$W_R = \frac{1}{2} k d^2 - 0 = \frac{1}{2} k d^2$

$W_R = 0 - \frac{1}{2} k d^2 = -\frac{1}{2} k d^2$

$W_R = \frac{1}{2} k d^2 - 0 = \frac{1}{2} k d^2$

$$W_{TOTAL} = 0$$

GRAVEDAD (CERCA DE LA SUP. TERRESTRE)

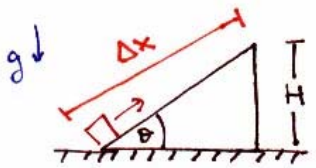


$$W_g = -mgh \quad W_g = mgh$$

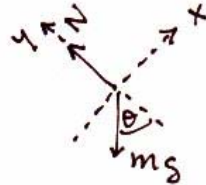
$$\therefore W_{\text{TOTAL}} = 0$$

UNA FUERZA SE DICE CONSERVATIVA SI EL TRABAJO TOTAL EN CUALQUIER TRAYECTORIA CERRADA ES CERO

OTRA MANERA DE DECIRLO ES : UNA FUERZA ES CONSERVATIVA SI W ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA QUE UNE DOS PUNTOS



DCL



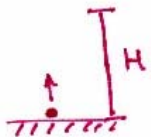
N y $mg \cos \theta$ NO EFECTÚAN TRABAJO

$$\Rightarrow W = -mg \sin \theta \Delta x$$

PERO $\sin \theta = \frac{H}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x \sin \theta = H$

$$W = -mgH$$

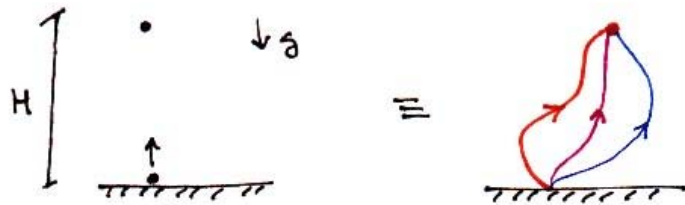
POR OTRO LADO



$$W = -mgH \leftarrow$$

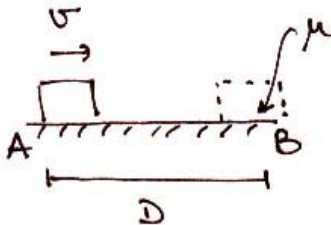
TRABAJO REALIZADO
POR LA GRAVEDAD AL
LEVANTAR LA PARTÍCULA
DESDE EL SUELO HASTA
UNA ALTURA H

EN GENERAL, W_g ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA. SÓLO DEPENDE DE LA ALTURA O DIFERENCIA DE ALTURA H .

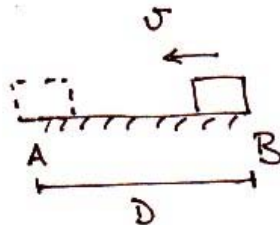


FUERZA NO-CONSERVATIVA

EJEMPLO FUERZA DE ROCE



$$W_{roce} = -\mu mg D$$



$$W_{roce} = -\mu mg D$$

$$W_{TOTAL} = -2\mu mg D \neq 0$$

ENERGÍA POTENCIAL

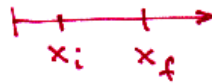
PARA UNA FUERZA CONSERVATIVA SE DEFINE
EL CAMBIO DE ENERGÍA POTENCIAL POR

$$\Delta U = -W$$

EJEMPLOS:

RESORTE 

$$W_R = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$



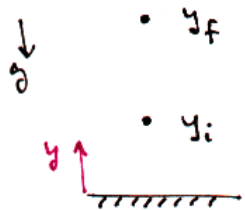
$$\Delta U = U_f - U_i = - \left(\frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 \right)$$

$$U_f - U_i = \frac{1}{2} k x_f^2 - \frac{1}{2} k x_i^2$$

$\therefore$

$$U_{\text{RESORTE}} = \frac{1}{2} k x^2$$

FUERZA DE GRAVEDAD



$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Delta U = -W_g$$

$$U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$$

$\therefore$

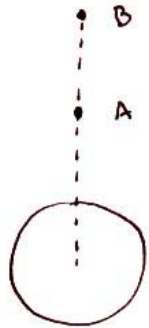
$$U_{\text{gravedad}} = mgy$$

ENERGÍA POTENCIAL
GRAVITACIONAL

EN GENERAL, U REPRESENTA LA CAPACIDAD DE UNA PARTÍCULA PARA REALIZAR TRABAJO DEBIDO A SU POSICIÓN

ADemás SÓLO SE PUEDE MEDIR ΔU , LA DIFERENCIA DE ENERGÍA POTENCIAL ENTRE DOS POSICIONES

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL



¿TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA PARA LLEVAR UNA MASA m DESDE r_A HASTA r_B ?

$$\vec{F}_{\text{ext}} = - \vec{F}_{\text{gravedad}}$$

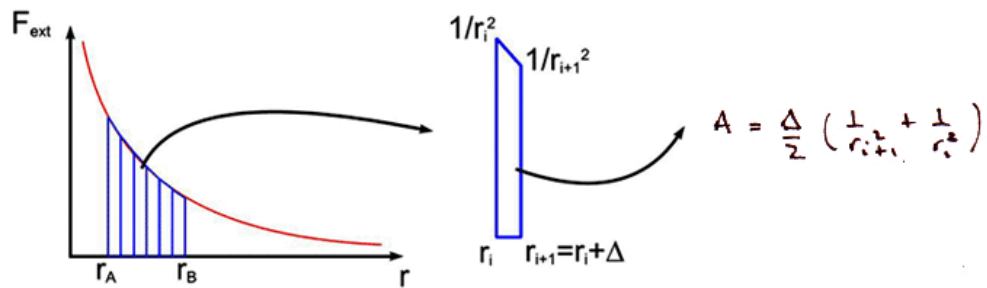
$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

SI TRASLADAMOS LA PARTÍCULA RADIALMENTE DESDE A HASTA B, LA FUERZA $\vec{F}$ Y EL DESPLAZAMIENTO $\Delta \vec{r}$ APUNTARÁN SIEMPRE EN LA MISMA DIRECCIÓN, ENTONCES

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = GMm \sum_{r_A}^{r_B} \frac{\Delta r_i}{r_i^2}$$

$$W_{A \rightarrow B} = GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

GRÁFICAMENTE SE TIENE



$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right)$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[r_i (r_i + \Delta)^{-1} + \frac{(r_i + \Delta)}{r_i} \right]$$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[\left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right)^{-1} + \left(1 + \frac{\Delta}{r_i} \right) \right]$$

$\Delta \rightarrow 0$

$$= \frac{\Delta}{2} \frac{1}{r_i r_{i+1}} \left[1 - \cancel{\frac{\Delta}{r_i}} + 1 + \cancel{\frac{\Delta}{r_i}} \right]$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{\Delta}{r_i r_{i+1}}$$

$$\text{ÁREA TRAPECIO } i\text{-ÉSIMO} = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i r_{i+1}} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}$$

$$\text{POR LO TANTO } W_{A \rightarrow B} = G M m \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)$$

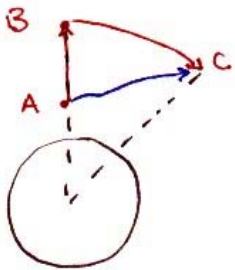
$$\text{DONDE } r_1 \equiv r_A \text{ Y } r_{N+1} \equiv r_B.$$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = G M m \left[\left(\frac{1}{r_A} - \cancel{\frac{1}{r_2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{r_2}} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_B} \right) \right]$$

$$\therefore \boxed{W_{A \rightarrow B} = G M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)}$$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA
EXTERNA PARA MOVER LA MASA m
DESDE r_A HASTA r_B EN CONTRA DE LA
ATRACCIÓN GRAVITACIONAL DE LA TIERRA

EL TRABAJO PARA MOVER LA MASA m DESDE A HASTA C
NO DEPENDE DE LA TRAYECTORIA SÓLO DEPENDE
DE LA POSICIÓN INICIAL Y FINAL



$$r_B = r_C$$

$$W_{A \rightarrow C} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C}$$

POQUE EL DESPLAZAMIENTO
ES PERPENDICULAR A LA
FUERZA GRAVITACIONAL

LA FUERZA DE GRAVEDAD ES UNA FUERZA
CONSERVATIVA



SE DEFINE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL POR

$$\Delta U = -W_{\text{grav}} = - \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_{\text{grav}} \cdot d\vec{r}$$

PERO $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{grav}}$ ENTONCES

$$\Delta U = W_{A \rightarrow B} = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

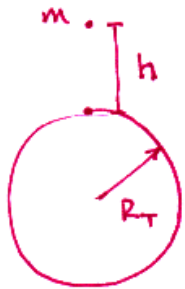
$$U_B - U_A = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$

$\Rightarrow$

$$U(r) = - \frac{GMm}{r}$$

ENERGÍA POTENCIAL
GRAVITACIONAL

VARIACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL CERCA DE LA
SUPERFICIE TERRESTRE



$$\Delta U = -GMm \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right)$$

$$\Delta U = -\frac{GMm}{R_T} \left(\frac{R_T}{R_T + h} - 1 \right)$$

$$\Delta U = -\frac{GMm}{R_T} \left(\frac{1}{1 + h/R_T} - 1 \right)$$

$$\Delta U \approx -\frac{GMm}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} - 1 \right)$$

$$\Delta U \approx m \underbrace{\left(\frac{GM}{R_T^2} \right)}_{g} h = mgh$$

g = gravedad en la
superficie de la Tierra

Trabajo y Energía Cinética

En las Olimpiadas de 1996, Andrey Chemerkin rompió el record mundial al levantar 260 kg desde el piso hasta arriba de su cabeza (aprox. 2 m). En 1957, Paul Anderson se acostó debajo de una plataforma de madera cargada con pedazos de plomo con un peso total de 27.900 N (¡2.850 kg!) y luego la levantó cerca de 1 cm.



¿Quién hizo más trabajo sobre los objetos que levantaron?



CHEMERKIN LEVANTÓ UNA MASA TOTAL $m = 260 \text{ kg}$
HASTA UNA ALTURA $H = 2 \text{ m}$

TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD

$$W_{\text{grav}} = -mgH = - (2548 \text{ N}) (20 \text{ m})$$

$$W_{\text{grav}} = -5100 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{\text{aplicado}} = -W_{\text{grav}} = 5100 \text{ J}$$

POR OTRO LADO, ANDERSON EFECTUÓ UN TRABAJO
DADO POR

$$W_{\text{aplicado}} = -W_{\text{grav}} = mg \Delta y$$

$$W_{\text{aplicado}} = (27900 \text{ N}) (0.01 \text{ m}) = 280 \text{ J}$$

ANDERSON NECESITÓ APLICAR UNA GRAN FUERZA PARA
LEVANTAR LA PLATAFORMA PERO EMPLEÓ SOLO UNA
PEQUEÑA CANTIDAD DE ENERGÍA.

CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

SI EN UN SISTEMA ACTÚAN SÓLO FUERZAS
CONSERVATIVAS

$$\Delta U_{\text{TOTAL}} = -W_{\text{TOTAL}}$$

POR EL TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

$$W_{\text{TOTAL}} = \Delta K$$

CON $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ (ENERGÍA CINÉTICA)

ENTONCES

$$\Delta U_{\text{TOTAL}} = -\Delta K$$

$$U_f - U_i = -\left(\frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2\right)$$

$$U_i + \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 = U_f + \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2$$

SE DEFINE LA ENERGÍA MECÁNICA POR

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

POR LO TANTO $E_f = E_i$

$\Rightarrow$

$$\Delta E = 0$$

CONSERVACIÓN
DE LA ENERGÍA
MECÁNICA

SI ADEMÁS EN EL SISTEMA ACTÚAN OTRAS
FUERZAS NO-CONSERVATIVAS (EJ. ROCE) SE
TIENE

$$W_{\text{TOTAL}} = W_{\text{FZAS. CONS.}} + W_{\text{OTRAS}}$$

PERO

$$W_{\text{FZAS. CONS.}} = -\Delta U_{\text{FZAS. CONS.}}$$

U SÓLO SE PUEDE
DEFINIR PARA
FZAS. CONS.

ADemás

$$W_{\text{TOTAL}} = \Delta K$$

ENTONCES

$$\Delta K = - \Delta U_{\substack{\text{FZAS.} \\ \text{CONS.}}} + W_{\text{OTRAS}}$$

$\Delta E_{\text{MECÁNICA}}$

$$\Delta(K + U) = W_{\text{OTRAS}}$$

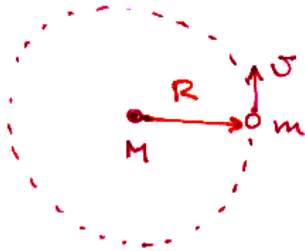
W_{OTRAS} GENERA OTROS TIPOS DE ENERGÍA
DISTINTOS A LA ENERGÍA MECÁNICA (EJ.
ENERGÍA TÉRMICA).

POR LO TANTO

$$\Delta E_{\text{TOTAL}} = \Delta(E_{\text{MEC.}} + E_{\text{OTRAS}}) = 0$$

CONSERVACIÓN DE
LA ENERGÍA

PLANETA O SATELITE EN ÓRBITA CIRCULAR



$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R}$$

PERO EN UNA ÓRBITA
CIRCULAR SE TIENE

$$\frac{G M m}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{G M m}{R}$$

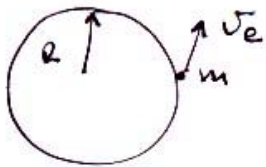
ENTONCES

$$E = \frac{1}{2} \frac{G M m}{R} - \frac{G M m}{R} = -\frac{1}{2} \frac{G M m}{R} < 0$$

UNA ÓRBITA SE DICE QUE ESTÁ LIGADA AL CENTRO
DE FUERZAS SI SU ENERGÍA TOTAL ES NEGATIVA

ESTE ES EL CASO DE TODOS LOS PLANETAS RESPECTO
AL SOL Y DE ALGUNOS COMETAS (AQUELLOS PERIÓDICOS)

VELOCIDAD DE ESCAPE



v_e = VELOCIDAD DE ESCAPE
= VELOCIDAD MÍNIMA
PARA ESCAPAR DE LA
ATRACCIÓN GRAVITACIONAL
DE LA TIERRA (U OTRO
PLANETA)

v_e ESTÁ DADO POR LA CONDICIÓN $E = 0$ DONDE

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

$\Rightarrow$

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

VELOCIDAD
DE
ESCAPE

$v_e = 11.2 \text{ km/s}$ EN LA TIERRA

Energía Potencial y Conservación de Energía

Los habitantes prehistóricos de la Isla de Pascua esculpieron cientos de estatuas de piedra (moais) en las laderas de sus volcanes y luego las movieron a diferentes sitios alrededor de toda la isla. La forma cómo ellos pudieron mover estas gigantescas estatuas tanto como 10 km sin la ayuda de maquinas sofisticadas ha sido un tema de amplio debate, con muchas delirantes teorías acerca de la fuente de la energía empleada.



¿Cómo pudo ser realizada esta tarea usando sólo medios primitivos?



ES MUY PROBABLE QUE LOS MOAIS HAYAN SIDO MOVIDOS
POR LOS ANTIGUOS HABITANTES DE ISLA DE PASCUA
USANDO TRONCOS Y RAMAS PARA HACERLOS DESLIZAR.

EN UNA RECREACIÓN MODERNA DE ESTE SISTEMA,
25 HOMBRES FUERON CAPACES DE MOVER SOBRE UN
PLANO HORIZONTAL UN MOAI DE 4000 KG UNA
DISTANCIA DE 45 m EN 2 MIN

SI CADA HOMBRE EJERCE UNA FUERZA PROMEDIO
IGUAL A 2 VECES SU PESO, EL TRABAJO TOTAL
ES

$$W_{\text{ext}} = |\vec{F}_{\text{ext}}| |\Delta \vec{x}| \cos \theta = 50 m g d$$

$$W_{\text{ext}} = 50 (80 \text{ kg}) (9.8 \text{ m/s}^2) (45 \text{ m})$$

$$W_{\text{ext}} = 1.8 \times 10^6 \text{ J}$$

ESTE TRABAJO CAMBIA LA ENERGÍA CINÉTICA DEL SISTEMA, PERO COMO EXISTE UN CONSIDERABLE ROCE ENTRE LOS TRONCOS, EL HOAJI Y EL SUELO PARTE DE ESTA ENERGÍA SE "PIERDE" EN CALOR.

$$\Delta E_{\text{calor}} + \overset{0}{\cancel{\Delta E_{\text{mecánica}}}} = W_{\text{ext}} = 1.8 \times 10^6 \text{ J}$$

CALORIA: SE DEFINE LA CALORIA (cal) COMO LA ENERGÍA NECESARIA PARA ELEVAR LA TEMPERATURA DE 1 g DE AGUA DE $14,5^\circ\text{C}$ A $15,5^\circ\text{C}$.

LAS CALORIAS DE VALOR ALIMENTARIO SE MIDEN EN KILOCALORIAS (10^3 cal)

$$1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$$

EJEMPLO: UN ESTUDIANTE DESEA PERDER PESO
SUBIENDO ESCALERAS.

SUPONGAMOS QUE SUBE 80 Peldaños, CADA UNO DE
0,15 m DE ALTO EN 65 s IGNOREMOS LA ENERGÍA
EMPLERADA AL BAJAR.

METABOLIZAR 1 g DE GRASA LIBERA 9 kcal

TÍPICAMENTE LA EFICIENCIA DE LOS MUSCULOS HUMANOS ES
 $\sim 20\%$. ES DECIR CUANDO EL CUERPO CONVIERTE 100 J
AL METABOLIZAR GRASA CORPORAL, SÓLO 20 J VAN A
REALIZAR TRABAJO MECÁNICO, EL RESTO SE CONVIERTE
EN ENERGÍA INTERNA.

i) ¿CUANTAS VECES TIENE QUE SUBIR LAS ESCALERAS
PARA PERDER 500 g DE GRASA?

ii) POTENCIA PROMEDIO AL SUBIR LAS ESCALERAS

i)

$$\begin{aligned} \text{ENERGÍA LIBERADA AL} \\ \text{QUEMAR 500 g DE GRASA} &= 500 \text{ g} \left(\frac{9 \text{ kcal}}{1 \text{ g}} \right) \left(\frac{4186 \text{ J}}{1 \text{ kcal}} \right) \\ &= 1.88 \times 10^7 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{ENERGÍA MECÁNICA} = \Delta E = 0.2 \times (1.88 \times 10^7 \text{ J})$$

$$\Delta E = W = n F \Delta y$$

$$\Delta E = n (80 \text{ kg}) (9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (80 \times 0.15 \text{ m})$$

$$3.77 \times 10^6 \text{ J} = n (9.41 \times 10^3 \text{ J})$$

$$\therefore n = 400 !!$$

$$\text{ii)} \quad P_{\text{promedio}} = \frac{W}{t} = \frac{9.41 \times 10^3 \text{ J}}{65 \text{ s}} = 144.8 \text{ W}$$

$$P_{\text{promedio}} = 144.8 \text{ W} \left(\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}} \right) = 0.194 \text{ hp}$$