

Trabajo y Energía Cinética

En las Olimpiadas de 1996, Andrey Chemerkin rompió el record mundial al levantar 260 kg desde el piso hasta arriba de su cabeza (aprox. 2 m). En 1957, Paul Anderson se acostó debajo de una plataforma de madera cargada con pedazos de plomo con un peso total de 27.900 N (¡2.850 kg!) y luego la levantó cerca de 1 cm.



¿Quién hizo más trabajo sobre los objetos que levantaron?



TRABAJO Y ENERGÍA

LAS LEYES DE NEWTON RELACIONAN LA ACELERACIÓN CON LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO. ESTO PERMITE PREDECIR LOS VALORES FUTUROS DE LA POSICIÓN Y VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA.

SIN EMBARGO, EN MUCHAS SITUACIONES ES DIFÍCIL USAR LAS LEYES DE NEWTON PARA ANALIZAR EL MOVIMIENTO Y PREDECIR, POR EJEMPLO, LA VELOCIDAD DE UNA PARTÍCULA EN UN PUNTO ARBITRARIO DE LA TRAYECTORIA

EJEMPLO: SALTADOR DE SKI



PARA ESTO, EXISTE UNA MANERA ALTERNATIVA DE RELACIONAR FUERZAS Y EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

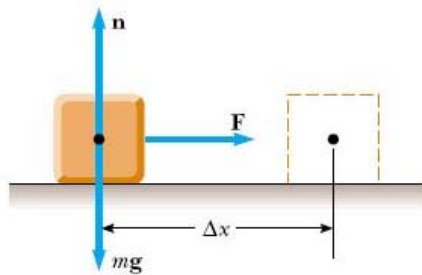
⇒ TEOREMA TRABAJO - ENERGÍA

TRABAJO EN 1-DIMENSION

CASO MAS SIMPLE : FUERZA CONSTANTE UNA DIMENSION



LA FUERZA F QUE ACTÚA SOBRE UNA PARTÍCULA
QUE SE MUEVE A LO LARGO DEL EJE x
REALIZA UN TRABAJO DADO POR



DESPLAZAMIENTO
DE LA PARTÍCULA

$$W = F \Delta x$$

TRABAJO REALIZADO
POR LA FUERZA F

$$\Delta x = x_f - x_i \Rightarrow$$

$$\Delta x > 0 \quad \text{si} \quad x_f > x_i$$

$$\Delta x < 0 \quad \text{si} \quad x_f < x_i$$

W ES UNA CANTIDAD ESCALAR



$W > 0 \Rightarrow$ FUERZA Y DESPLAZAMIENTO TIENEN
EL MISMO SENTIDO

$W < 0 \Rightarrow$ FUERZA Y DESPLAZAMIENTO APUNTAN
EN SENTIDOS OPUESTOS

$W = 0 \Leftrightarrow \Delta x = 0$



UNIDADES: $[W] = [F][\Delta x] = \text{N} \cdot \text{m} \equiv \text{JOULES}$

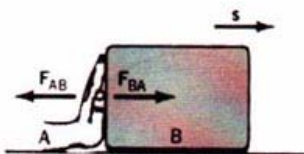
SI VARIAS FUERZAS ACTÚAN SOBRE UNA PARTÍCULA
EL TRABAJO TOTAL ES LA SUMA DE LOS TRABAJOS
INDIVIDUALES

$$W_{\text{TOTAL}} = F_{\text{net}} \Delta x = \left(\sum_i F_i \right) \Delta x$$

$$W_{\text{TOTAL}} = F_1 \Delta x + F_2 \Delta x + \dots$$

$$W_{\text{TOTAL}} = W_1 + W_2 + \dots = \sum_i W_i$$

ES IMPORTANTE IDENTIFICAR LA FUERZA QUE
INTERACTÚA CON EL CUERPO AL CALCULAR EL
TRABAJO



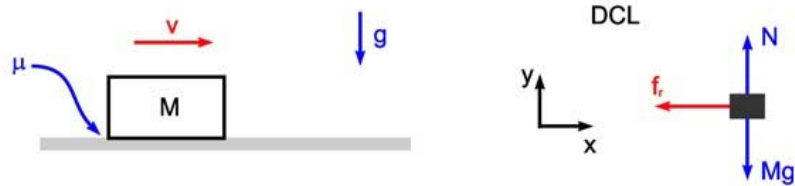
POR LA 3ª LEY DE
NEWTON SABEMOS QUE

$$\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA}$$

ENTONCES

$$W_{\text{A SOBRE B}} = - W_{\text{B SOBRE A}}$$

EJEMPLO :



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON

$$\hat{x}) \quad -f_r = Ma$$

$$\hat{y}) \quad N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$$

$$\text{ENTONCES } f_r = \mu N = \mu Mg$$

$$\Rightarrow \quad Ma = -f_r = -\mu Mg$$

$$a = -\mu g$$

LA ACELERACIÓN ES CONSTANTE Y APUNTA EN SENTIDO NEGATIVO POR LO TANTO EL BLOQUE DESACELERA

EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA DE ROCE ES

$$W = -f_r \Delta x = -\mu Mg \Delta x < 0$$

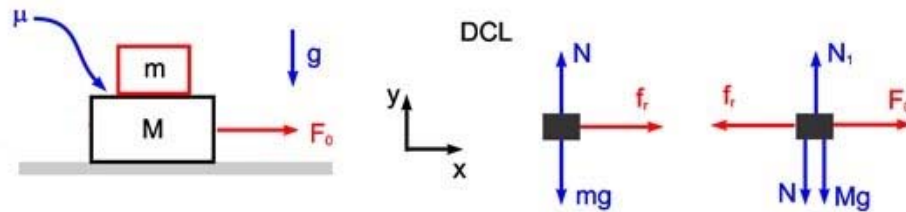
↑
 Δx ES POSITIVO

EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA DE ROCE
 NO SIEMPRE ES NEGATIVO



EJEMPLO

UN BLOQUE DE MASA m DESCANSA SOBRE UN
 BLOQUE DE MASA M QUE DESLIZA SIN ROCE SOBRE
 EL PISO QUE ES TIRADO POR UNA CUERDA



APLICANDO 2ª LEY DE NEWTON AL BLOQUE m

$$\hat{x}) \quad f_r = ma$$

$$\hat{y}) \quad N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\text{ENTONCES } f_r = \mu mg$$

$$\Rightarrow W = f_r \Delta x = \mu mg \Delta x > 0$$

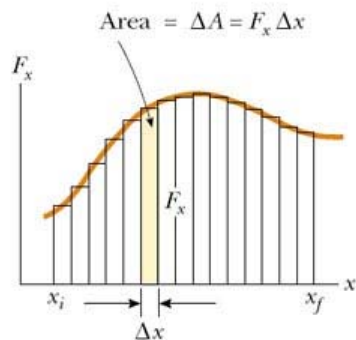
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

$\vec{F} = \vec{F}(x)$ ES DECIR, LA FUERZA DEPENDE DE LA POSICIÓN

↳ EJEMPLOS: RESORTE
GRAVEDAD

¿CUÁL ES EL TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA $F(x)$ PARA MOVER UNA PARTÍCULA DESDE x_i HASTA x_f ?

RECETA: DIVIDIR EL DESPLAZAMIENTO TOTAL EN UN GRAN NÚMERO DE PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS Δx



PARA CADA INTERVALO

$$\Delta W_j = F(x_j) \Delta x$$

⇒ ÁREA DE UN RECTÁN-
GULO DE ALTURA
 $F(x_j)$ Y BASE Δx

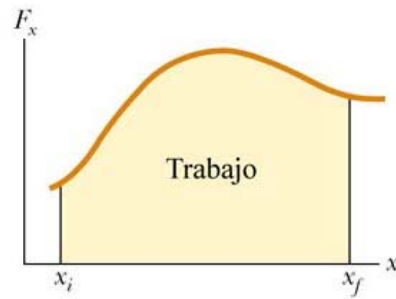
TRABAJO TOTAL = SUMA DE TODOS LOS ΔW_j

$$W = \sum_{j=1}^N W_j = \sum_{j=1}^N F(x_j) \Delta x$$

EN EL LÍMITE $\Delta x \rightarrow 0$ Y $N \rightarrow \infty$ SE TIENE

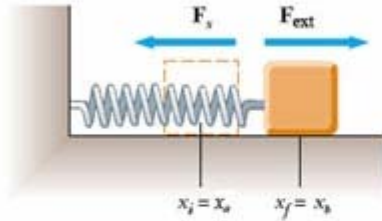
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

(Integral Definida)



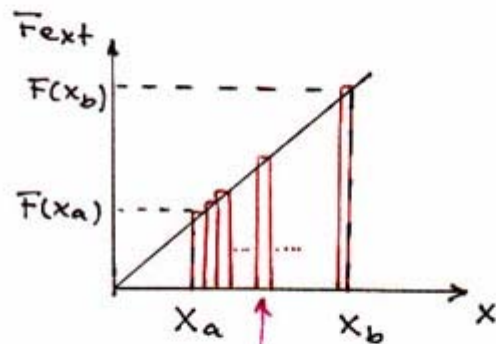
$W \equiv \text{ÁREA BAJO LA CURVA } F(x)$

Ejemplo: resorte ideal



$$\bar{F}_{\text{externa}} = -\bar{F}(x) = kx$$

ESTIRAMOS LENTAMENTE
EL RESORTE



$$\Delta W_i = \bar{F}(x_i) \Delta x$$

$$W = \sum_{i=1}^N \bar{F}(x_i) \Delta x \equiv \text{ÁREA TRAPECIO}$$

TRABAJO PARA
ESTIRAR EL
RESORTE

$$W = \text{AREA } \square + \text{AREA } \triangle$$

$$W = (x_b - x_a) \cdot F(x_a) + \frac{1}{2} (x_b - x_a) [F(x_b) - F(x_a)]$$

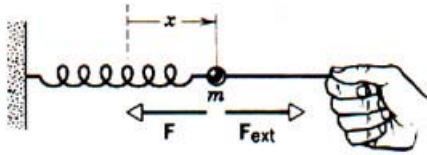
$$W = (x_b - x_a) \left[kx_a + \frac{1}{2} (kx_b - kx_a) \right]$$

$$W = k(x_b - x_a) \left[\frac{1}{2} x_b + \frac{1}{2} x_a \right]$$

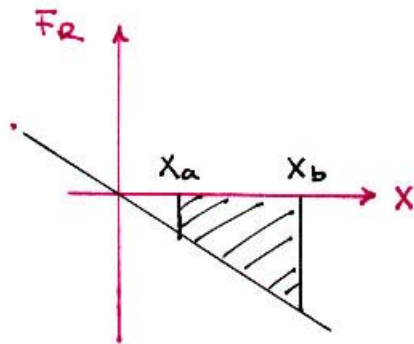
$$\therefore \boxed{W = \frac{1}{2} k x_b^2 - \frac{1}{2} k x_a^2}$$

$x_b > x_a \Rightarrow W > 0 \Rightarrow$ LA FUERZA EXTERNA
REALIZA EL TRABAJO

$x_b < x_a \Rightarrow W < 0 \Rightarrow$ EL RESORTE ARRASTRA
LENTAMENTE AL AGENTE
EXTERNO



TRABAJO SOBRE LA
 PARTÍCULA EFECTUADO
 POR EL RESORTE = $\int_{x_a}^{x_b} F_R dx$



$$W_R = \int_{x_a}^{x_b} (-kx) dx$$

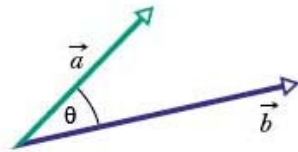
$$W_R = -\frac{k}{2} (x_b^2 - x_a^2)$$

$$W_R = \frac{1}{2} k x_a^2 - \frac{1}{2} k x_b^2$$

Si $x_a > x_b \Rightarrow$ EL RESORTE SE CONTRAE
 y $W_R > 0$

Si $x_a < x_b \Rightarrow$ EL RESORTE SE ESTIRA
 y $W_R < 0$

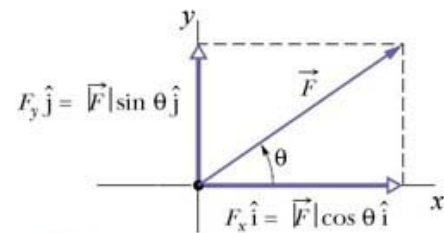
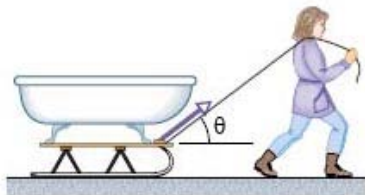
PRODUCTO PUNTO



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

TRABAJO EN 3-DIMENSIONES



DEFINICIÓN

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}$$

FUERZA CONSTANTE

DESPLAZAMIENTO

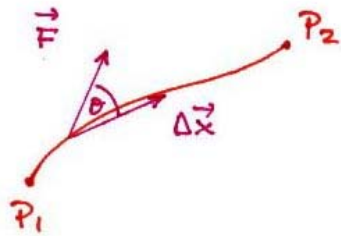
$$W = F \Delta x \cos \theta = F \cos \theta \Delta x$$

$W = 0$ si $\vec{F} \perp \Delta \vec{x}$ ($\theta = \pi/2$)

$W > 0$ si $\vec{F}$ y $\Delta \vec{x}$ TIENEN EL MISMO SENTIDO ($\theta = 0$)

$W < 0$ si $\vec{F}$ y $\Delta \vec{x}$ APUNTAN EN SENTIDOS OPUESTOS ($\theta = \pi$)

FUERZA VARIABLE :



$$\Delta W_i = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$W = \sum \Delta W_i$$

Si $|\Delta \vec{x}| \rightarrow 0$ $W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\leftarrow$ DESPLAZAMIENTO INFINITESIMAL TANGENTE A LA TRAYECTORIA
 (integral de linea)

POTENCIA

SE DEFINE LA POTENCIA MECÁNICA COMO LA RAZÓN A LA CUAL SE HACE EL TRABAJO.

POTENCIA PROMEDIO $P_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}$

POTENCIA INSTANTÁNEA $P = \frac{dW}{dt}$

UNIDADES: $J/s = W$ (watt)

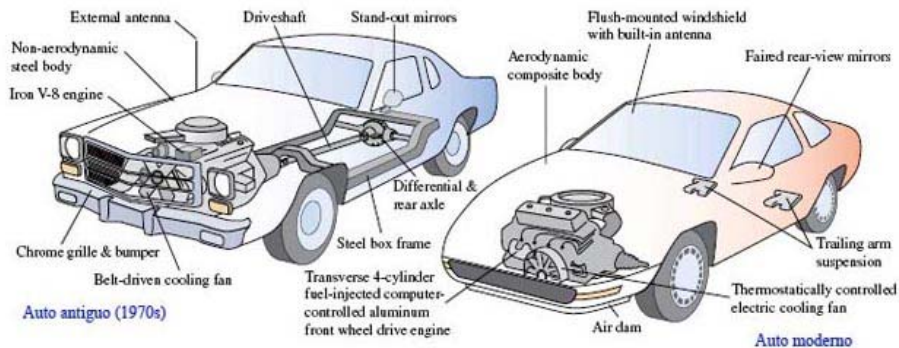
OTRA UNIDAD DE POTENCIA SON LOS CABALLOS DE POTENCIA (HP) $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$

COMO $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \Rightarrow P = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{x}}{\Delta t}$
 $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

1KWh ES EL TRABAJO REALIZADO EN 1 HORA
CUANDO LA POTENCIA ES 1KW

$$1\text{KWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 1\text{h} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

EJEMPLO : ENERGÍA Y EL AUTOMÓVIL



AUTOMÓVILES IMPULSADOS POR GASOLINA SON MÁQUINAS
MUY INEFICIENTES: MENOS DEL 15% DE LA ENERGÍA
QUÍMICA DEL COMBUSTIBLE ES USADA PARA MOVER
EL VEHÍCULO

67% DE LA ENERGÍA SE PIERDE EN EL MOTOR

10% SE PIERDE EN LA TRANSMISIÓN

6% SE PIERDE EN EL ROCE DE LAS PARTES
INTERNAS DEL AUTO

4% SE PIERDE EN LAS BOMBAS DE ACEITE Y
GASOLINA Y EN EL AIRE ACONDICIONADO

EL 13% RESTANTE SE USA PARA BALANCEAR LA
ENERGÍA PERDIDA POR EL ROCE DE LAS RUEDAS CON
EL SUELO Y EL ROCE CON EL AIRE

EL COEFICIENTE DE ROCE ENTRE LAS RUEDAS Y EL
PISO ES ~ 0.016

PARA UN AUTO DE 1450 KG $\Rightarrow$ PESO = 14200 N

ENTONCES $f_r = \mu M g = 227 \text{ N}$

LA FUERZA DE ROCE CON EL AIRE ES

$$f_a = \frac{1}{2} \rho A v^2$$

DONDE D ES EL COEFICIENTE DE ARRASTRE, A ES LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL AUTO Y ρ ES LA DENSIDAD DEL AIRE ($\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$)

TÍPICAMENTE $D \sim 0.50$ Y $A \sim 2 \text{ m}^2$

Fuerzas de roce y potencia requerida por un automóvil típico						
$v(\text{km/h})$	$v(\text{m/s})$	$N(\text{N})$	$f_r(\text{N})$	$f_a(\text{N})$	$f_t(\text{N})$	$\mathcal{P} = f_t v(\text{kW})$
0	0	14 200	227	0	227	0
32	8.9	14 100	226	48	274	2.4
64	17.9	13 900	222	192	414	7.4
96	26.8	13 600	218	431	649	17.4
128	35.8	13 200	211	767	978	35.0
160	44.7	12 600	202	1 199	1 400	62.6

FUERZA DE ROCE TOTAL $f_t = f_r + f_a$

POTENCIA TOTAL PARA MANTENER UNA VELOCIDAD CONSTANTE v ES $\mathcal{P} = f_t v$

ESTA ES LA POTENCIA QUE TIENE QUE ENTREGAR
EL MOTOR PARA QUE EL AUTO AVANCE

POR EJEMPLO, SI $v = 96 \text{ km/h} = 26.8 \text{ m/s}$

$$P = 649 \text{ N} \cdot 26.8 \text{ m/s} = 17.4 \text{ kW}$$

$$P = P_a + P_r = f_a v + f_r v$$

$$\text{CON } P_a = 11.6 \text{ kW} \text{ Y } P_r = 5.84 \text{ kW}$$

∴ 67% DE LA POTENCIA ES USADA PARA
COMPENSAR LA RESISTENCIA DEL AIRE

$$\text{SI } v = 160 \text{ km/h} = 44.7 \text{ m/s} \Rightarrow P_a = 53.6 \text{ kW} \\ P_r = 9.03 \text{ kW}$$

∴ 86% DE LA POTENCIA ES EMPLEADA PARA
COMPENSAR LA RESISTENCIA DEL AIRE

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

CASO ESPECIAL $\rightarrow$ FUERZA CONSTANTE

$$W = \overline{F} \cdot \Delta x = \overline{F} (x_f - x_i)$$

TRABAJO TOTAL $\nearrow$ $\nwarrow$ DESPLAZAMIENTO

Si $F = \text{cte} \Rightarrow a = \frac{\overline{F}}{m} = \text{cte}$

RECORDAMOS QUE

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

EXPRESIÓN VÁLIDA PARA UN MOVIMIENTO
CON $a = \text{cte}$

ENTONCES

$$W = ma(x_f - x_i)$$

$$W = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

ENERGÍA CINÉTICA $\rightarrow$

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

POR LO TANTO

$$W = \Delta K$$

TEOREMA
TRABAJO - ENERGÍA



RELACIONA LA ENERGÍA CINÉTICA
DE UNA PARTÍCULA CON EL
TRABAJO TOTAL

K REPRESENTA LA CAPACIDAD DE UNA PARTÍCULA
DE REALIZAR TRABAJO DEBIDO A SU VELOCIDAD

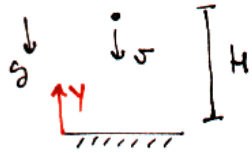
$W > 0 \Rightarrow$ ENERGÍA CINÉTICA AUMENTA

$W < 0 \Rightarrow$ ENERGÍA CINÉTICA DISMINUYE

EL TEOREMA TRABAJO - ENERGÍA ES VÁLIDO INCLUSO PARA
FUERZAS QUE DEPENDEN DE LA POSICIÓN EN 3D

EJEMPLOS

①



$$W_g = -mg \Delta y = -mg(0 - H)$$

$$W_g = mgH$$

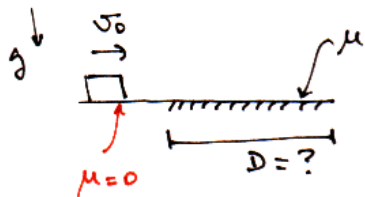
$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH$$

$$v = \sqrt{2gH}$$

② FUERZA DE ROCE



$$W_g = 0 \quad (\vec{g} \text{ es } \perp \text{ al desplazamiento})$$

$$W_{roce} = -f_r \cdot D = -\mu mg D$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg D \Rightarrow D = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$