TRANSFORMADA DE LAPLACE

FD704 METODOS EXPERIMENTALES EN FLUIDODINAMICA
Prof. Y. Niño — Sem. Otoño 2004

1 Integral de Laplace

Consideremos la transformada de Fourier de una función $f(t)$:

$$\Im(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \exp(-i\ \omega\ t)\ dt$$

la cual corresponde a una función compleja de la variable real ω. Consideremos ahora el caso en que ω es complejo y denotemos s al complejo $i\ \omega$. La integral anterior se puede escribir entonces como:

$$\Im(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt$$

Esta integral se conoce como la *integral de Laplace de dos lados*. Consideraciones respecto a la convergencia de esta integral se pueden obtener si se expresa el complejo $s = \sigma + i\ \omega$, de modo que la integral de Laplace queda:

$$\Im(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \exp(-\sigma\ t)\ \exp(-i\ \omega\ t)\ dt$$

la cual corresponde a la transformada de Fourier de la función:

$$f(t)\ \exp(-\sigma\ t)$$

Según el teorema de la integral de Fourier, para que la integral anterior converja se requiere, como condición suficiente, que la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ \exp(-\sigma\ t)\ dt$$

exista, de donde se deduce que para una función $f(t)$ dada, esta integral puede existir para ciertos valores de σ y no para otros.

Dado que la integral de Laplace de dos lados se puede expresar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt =$$

$$\int_{0}^{\infty} f(-t)\ \exp(s\ t)\ dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt$$

entonces es posible obtener toda la información necesaria sobre la transformada de Laplace de dos lados analizando solo la integral entre 0 e ∞:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt$$

la cual podemos denotar simplemente *integral de Laplace* o *transformada de Laplace*.

Existe un teorema que prueba que esta integral converge para valores de $\Re[s] > \alpha_0$, donde α_0 es un real que que corresponde al mínimo valor de α tal que:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\ \exp(-\alpha\ t) = 0$$

Funciones $f(t)$ que satisfacen la condición anterior para $\alpha > \alpha_0$ se dice que son de *orden exponencial* α_0. En general, funciones que corresponden a respuestas de sistemas lineales estables son de orden exponencial 0. Variables como la velocidad o la corriente eléctrica siempre toman valores finitos y por lo tanto $f(t)$ siempre es acotada. Funciones acotadas son, obviamente, de orden exponencial 0. Funciones no acotadas, por ejemplo aquellas que son proporcionales a alguna potencia del tiempo, t^n, son también claramente de orden exponencial 0. En un sistema inestable, la función $f(t)$ puede crecer exponencialmente como $\exp(a\ t)$. Es fácil ver que esta función es de orden exponencial a.

2 Combinaciones lineales de transformadas de Laplace

Llamemos a la transformada de Laplace:

$$F(s) = \ell[f(t)]$$

entonces se tiene que:

$$\ell[k\ f(t)] = \int_0^{\infty} k\ f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt = k\ \int_0^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt = k\ \ell[f(t)]$$

donde k es una constante real.

Si ahora consideramos una segunda función $g(t)$, de modo que mientras $f(t)$ es de orden exponencial σ_f, $g(t)$ lo es σ_g, entonces en este caso la transformada de la suma de f y g es:

$$\ell[f(t)+g(t)] = \int_0^{\infty} (f(t)+g(t))\ \exp(-s\ t)\ dt = \int_0^{\infty} f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt + \int_0^{\infty} g(t)\ \exp(-s\ t)\ dt =$$

$$\ell[f(t)] + \ell[g(t)]$$

y el intervalo de convergencia de $\ell[f(t)+g(t)]$ es: $\Re[s] > \max[\sigma_f, \sigma_g]$.

Generalizando se tiene:

$$\ell[k_1\ f(t) + k_2\ g(t)] = k_1\ \ell[f(t)] + k_2\ \ell[g(t)]$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales.

3 Transformadas de Laplace de funciones típicas

Para hacer el cálculo explícito de la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es preciso resolver la integral:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\ \exp(-s\ t)\ dt$$

donde $\exp(-s\ t)$ es un complejo. Sin embargo, si $F(s)$ es analítica puede simplificarse el cálculo de la integral anterior. En efecto, recordando que hemos llamado σ a la parte real de s: $\Re[s] = \sigma$, entonces en ese caso, si conocemos $F(\sigma)$ es posible obtener $F(s)$ simplemente reemplazando σ por s.

Consideremos la función $f(t) = \exp(a\ t)$, de orden exponencial a (es decir con un intervalo de convergencia $\Re[s] > a$). La transformada de Laplace de f se obtiene primero calculando $F(\sigma)$:

$$F(\sigma) = \int_0^\infty \exp(a\ t)\ \exp(-\sigma\ t)\ dt = \int_0^\infty \exp((a-\sigma)\ t)\ dt =$$

$$-\left.\frac{\exp(-(\sigma-a)\ t)}{\sigma-a}\right|_0^\infty = \frac{1}{\sigma-a}$$

y reemplazando σ por s, se llega finalmente a:

$$F(s) = \ell[f(t)] = \frac{1}{s-a}$$

Para la función $f(t) = 1$, con orden exponencial 0, se obtiene, imponiendo $a = 0$ en el resultado anterior:

$$F(s) = \ell[f(t)] = \frac{1}{s}$$

La Tabla 1 muestra algunas de las transformadas de Laplace más básicas. Existen libros completos con colecciones de transformadas de Laplace que pueden consultarse para resolver casos más complejos. También puede utilizarse el software *Mathematica*, que es capaz de entregar analíticamente transformadas de Laplace.

Es importante mencionar que la transformada de Laplace tiene una transformada inversa única, de modo que la Tabla 1 puede utilizarse para determinar $F(s)$ conocido $f(t)$, o viceversa.

4 Transformada de Laplace de la derivada de $f(t)$

Consideremos la derivada de la función f con respecto a t: $f'(t)$. Su transformada de Laplace se puede calcular a partir de:

$$F(\sigma) = \int_0^\infty f'(t)\ \exp(-\sigma\ t)\ dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f'(t)\ \exp(\sigma\ t)\ dt$$

Esta integral se puede hacer por partes, de modo que:

$$\int_0^A f'(t)\ \exp(\sigma)\ t)\ dt = \lim_{\epsilon\to 0} f(t)\ \exp(-\sigma\ t)\Big|_\epsilon^A + \sigma \int_0^A f(t)\ \exp(-\sigma\ t)\ dt =$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
$\exp(a\ t)$	$1/(s-a)$
$\sin(b\ t)$	$b/(s^2+b^2)$
$\cos(b\ t)$	$s/(s^2+b^2)$
$\exp(a\ t)\ \sin(b\ t)$	$b/((s-a)^2+b^2)$
$\exp(a\ t)\ \cos(b\ t)$	$(s-a)/((s-a)^2+b^2)$
$t^n\ ;\ n \geq 0$	$n!/s^{n+1}$
$\begin{cases} 1 & 0<t<T \\ 0 & T<t \end{cases}$	$(1-\exp(-s\ T))/s$
$\delta(t-t_0)$	$\exp(-s\ t_0)$

Tabla 1: Transformadas de Laplace básicas

$$f(A)\ \exp(-\sigma\ A) - f(0+) + \sigma \int_0^A f(t)\ \exp(-\sigma\ t)\ dt$$

donde se ha denotado:

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = f(0+)$$

Es necesario hacer la precisión anterior, ya que es común que la función f sea discontinua en $t=0$, de modo que $f(0)$ no está definida o tiene un valor distinto a $f(0+)$.

Por otro lado, si f es de orden exponencial σ_0, entonces:

$$\lim_{A\to\infty} f(t)\ \exp(-\sigma\ A) = 0$$

cuando $\sigma > \sigma_0$. Además,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\ \exp(-\sigma\ t)\ dt$$

converge a $F(\sigma)$ para $\sigma > \sigma_0$. Por lo tanto, para este intervalo, se obtiene:

$$\int_0^\infty f'(t)\ \exp(-\sigma\ t)\ dt = \sigma\ F(\sigma) - f(0+)$$

y para la transformada de Laplace, reemplazando σ por s:

$$\ell[f'(t)] = s\ F(s) - f(0+)$$

Generalizando este resultado, se puede escribir para la derivada de orden n de f:

$$\ell[f^{(n)}(t)] = s^n\ F(s) - s^{n-1}\ f(0+) - s^{n-2}\ f^{(1)}(0+) - ... - f^{(n-1)}(0+)$$

Un resultado relacionado, corresponde a la transformada de Laplace de la integral de una función. Esta resulta ser:

$$\ell[\int_0^t f(\tau)\ d\tau] = \frac{\ell[f(t)]}{s}$$

5 Aplicación a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

La transformada de Laplace constituye una buena herramienta para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, fundamentalmente debido a la propiedad, deducida en la sección previa, de reducir en un orden la derivada sobre la cual se aplica. Ello permite, en general, reducir en un orden la ecuación diferencial si se toma la transformada de Laplace de la ecuación completa.

A continuación revisaremos un ejemplo correspondiente a un sistema lineal de primer orden, análogo a un sistema resorte-amortiguador sin masa o a un filtro eléctrico de paso bajo. La ecuación que describe tales sistemas tiene la forma:

$$T\,\frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

donde $f(t)$ es una función forzante. Supongamos, con el objeto de encontrar la respuesta de este sistema a un impulso, que $f(t) = \delta(t - t_0)$, donde t_0 es el instante de tiempo en el que se aplica el impulso, y que la condición inicial del sistema es: $y(0) = 0$.

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación anterior y usando los principios de linealidad revisados anteriormente, se tiene:

$$T\;\ell[\frac{dy}{dt}] + \ell[y] = \ell[\delta(t - t_0)]$$

y por lo tanto:

$$T\;(s\;\ell[y] - y(0+)) + \ell[y] = \exp(-s\;t_0)$$

Resolviendo para $\ell[y]$, notando que $y(0+) = 0$, se obtiene:

$$\ell[y] = \frac{1}{T}\;\frac{\exp(-s\;t_0)}{s + 1/T}$$

Es fácil demostrar que esta expresión corresponde a la transformada de Laplace de la función:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < t_0 \\ \frac{1}{T}\;\exp(-(t - t_0)/T) & t_0 < t \end{cases}$$

que corresponde, por lo tanto, a la solución de la ecuación diferencial analizada. Es claro, entonces, que al usar la transformada de Laplace para la ecuación lineal de primer orden anterior se obtiene una ecuación algebraica que es fácil de resolver. Para encontrar la solución buscada, sin embargo, es necesario aplicar la transformada inversa. Esto pone de manifiesto la necesidad de conocer dicha transformada, lo cual, en ciertos casos más complejos que el aquí analizado, puede tener una dificultad bastante grande.