dlx

Modelos de despacho en mercados eléctricos

21.1 Introducción

En este capítulo se amplía el análisis de los modelos de operación económica presentados en la sección ?? de este texto.

El problema de despacho y coordinación en un SEP busca determinar los niveles de producción de las centrales del sistema que permitan abastecer la demanda al menor costo posible, respetando las limitaciones técnicas impuestas por el modelo eléctrico utilizado. Este modelo es multinodal cuando representa explícitamente la red de transmisión, incorporando sus restricciones y fenómenos físicos. Al resolverlo, se obtiene una solución más apropiada para el problema real e información relevante desde el punto de vista económico. Dentro de esta información destacan los precios de la energía en cada nodo del sistema, que proporciona las señales de localización; una adecuada cuantificación de las pérdidas de transmisión con sus magnitudes y su consecuencia en las congestiones en la red.

El despacho y coordinación en mercados eléctricos se puede visualizar desde dos perspectivas que han tenido desarrollos paralelos.

La primera corresponde a la evolución que han experimentado los modelos matemáticos y las herramientas computacionales que permiten realizar las tareas del despacho de un sistema eléctrico. Los avances en las tecnologías de la información y lenguajes computacionales han hecho posible abordar de manera cada vez más compleja las decisiones de operación de un sistema, pasando de evaluaciones uninodales basadas en listas de mérito a modelos de flujo de potencia óptimo multinodales que incorporan restricciones de transmisión y criterios de seguridad. Lo anterior se extiende también a los sistemas hidrotérmicos, donde ha sido posible, por ejemplo, la modelación multiembalse en distintas escalas de tiempo.

La segunda perspectiva se refiere al avance en los modelos de organización del sector eléctrico, pasando de estructuras eminentemente centralizadas y monopólicas, a esquemas de libre acceso donde coexisten mercados bilaterales y de tipo *pool* (ver capítulo ??). Lo anterior condiciona de manera distinta los modelos matemáticos y herramientas necesarios para la operación y despacho de un sistema eléctrico.

Se ha optado por presentar de manera creciente la complejidad en la modelación de la operación de un sistema eléctrico, asociando, en cada sección, la aplicabilidad que el modelo presentado tiene en los distintos esquemas de mercado existentes a nivel internacional. Para ello se ha seleccionado un sistema ejemplo, que será abordado a través de las distintas secciones de este capítulo, de manera de poder identificar los distintos niveles de modelación.

Es importante señalar que el problema de despacho económico presentado en este capítulo no analiza la pertinencia o no de que una central opere en el sistema. Esta es una decisión previa, realizada con herramientas de análisis de predespacho (en inglés, estudios de "unit-commitment"). La existencia de potencias mínimas de generación conlleva la necesidad de usar variables enteras para representar el estado operativo o detenido de una determinada unidad. Asimismo, en un esquema de operación acoplado temporalmente, se deben incluir en el modelo los costos de partida y de parada de las plantas de generación térmica.

Cabe mencionar que en lo que sigue se hace uso de distintos modelos matemáticos utilizados y reportados en la literatura especializada. De esta forma no se ha considerado necesario justificar la validez matemática de algunos de los resultados presentados.

dlxii 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

21.2Sistema ejemplo

Un SEP constituye una red eléctrica que puede ser modelada por un grafo conexo constituido de nodos y ramas, donde los equipos de transmisión corresponden típicamente a las ramas, y los nodos, denominados barras en el lenguaje de potencia, representan los puntos de invección o retiro de la energía.

Puesto que en un sistema eléctrico la energía eléctrica se produce y consume instantáneamente, el problema se modela en función de la valorización y balances en cada condición de operación de "potencias". En un enfoque estático, el modelo del sistema contempla tres tipos de elementos: unidades de generación, cargas y equipos de transmisión.

El sistema eléctrico de tamaño mediano de tres nodos, en 220 kV, mostrado en la figura 21.1 tiene las características que se resumen en las tablas 21.1, 21.2 y 21.3.



FIGURE 21.1. Sistema base para estudios de despacho

Nombre	Origen	Destino	R R	$\begin{array}{c c} \text{Ineas de} \\ & X \end{array}$	B/2	Long	Capacidad
			[pu]	[pu]	[pu]	[km]	[MW]
Lin1-2	Nod1	Nod2	0,0207	0,0826	0,0702	100	130
Lin1-3	Nod1	Nod3	0,0116	0,0579	0,0491	70	130
Lin2-3	Nod2	Nod3	0,0100	0,0521	0,0421	60	130

Respecto de las unidades de generación, se conoce la siguiente información sobre su estructura de costos:

Gen1A: es una central hidroeléctrica de embalse. El valor del agua embalsada corresponde al costo de oportunidad del sistema, tanto de dejar el agua en el embalse como de turbinarla. Este valor se obtiene de programas de coordinación hidrotérmica que permiten estimar el costo futuro del agua en un sistema eléctrico. Para un periodo de operación de una hora, el costo asociado al volumen V en m^3 de agua turbinado queda expresado por la ecuación

TIDDED 21.2. Dattob de Scheradoros							
Nombre	Tipo	Nodo	Pmin	Pmax	Qmin	Qmax	Rango V
			[MW]	[MW]	[MVAr]	[MVAr]	[pu]
Gen1A	Hidráulico embalse	Nod1	40	80	-40	40	0,9-1,05
Gen1B	Térmico	Nod1	70	250	-100	100	0,9-1,05
Gen2A	Parque Eólico	Nod2	0	12	0	0	0,9-1,05
Gen2B	Térmico	Nod2	80	200	-100	125	0,9-1,05

TABLE 21.2. Datos de generadores

TABLE 21.3. Datos de consumos

Nombre	Tipo	Nodo	Р	Q
			[MW]	[MVAr]
C1	Consumo	Nod1	250	100
C3	Consumo	Nod3	180	90

 $cuadrática^1$:

$$C_{G1}(V) = 0,001625V + (3,125 \times 10^3)V^2[UM\$/h]$$
(21.1)

Dado que la central genera $0,9[\frac{MW}{m^3/s}]$, es posible convertir el costo de operación en función de la potencia generada. Puesto que el despacho está determinado para una hora, el caudal turbinado será de $(\frac{V}{3600})[m^3/s]$. Por lo tanto, se generará una potencia $P[MW] = 0,9[\frac{MW}{m^3/s}], \times (\frac{V}{3600})[m^3/s]$. Reemplazando $V = \frac{3600 \times P}{0,9} = 4000P$ en la ecuación 21.1 se obtiene:

$$C_{G1}(P_{G1}) = 6,5P_{G1} + 0,05P_{G1}^2[UM\$/h]$$
(21.2)

Gen1B: es una central térmica, cuya función de costo declarada al operador del sistema es:

$$C_{G2}(P_{G2}) = 7,0P_{G2} + 0,08P_{G2}^2[UM\$/h]$$
(21.3)

Gen2A: es un parque de aerogeneradores compuesto por 15 unidades, cuyas curvas características, así como las velocidades de viento se muestran en la figura 21.2.



FIGURE 21.2. Datos de las unidades de generación eólica.

Dado que al viento no se le asigna un costo de oportunidad, en forma análoga a lo que sucede con las centrales hidráulicas de pasada, el costo de operación de este tipo de unidades es cero. Puesto que en este caso las velocidades del viento exceden en todo momento los 13[m/s], cada uno de los generadores está entregando permanentemente su máxima potencia (800[kW]), lo que se traduce en una generación de 12[MW] para el parque eólico a costo cero.

¹Corresponde a una unidad monetaria ficticia.

dlxiv 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

Gen2B: es una central termoeléctrica a carbón, cuyo consumo específico es,

$$\frac{\partial H_4(P_{G4})}{\partial P_{G4}} = (6,384P_{G4} + 1540,56) \times 10^3 [\frac{kCal}{MWh}]$$
$$= (25,333P_{G4} + 6113,333) \times 10^{-3} [\frac{MBtu}{MWh}]$$

y en que el costo del carbón es $1, 6\left[\frac{UM\$}{MBtu}\right]$. La función de costo incremental de la unidad puede ser expresada como:

$$\frac{\partial C_{G4}(P_{G4})}{\partial P_{G4}} = (25,333P_{G4} + 6113,333) \times 10^{-3} \times 1,6[\frac{UM\$}{MWh}]$$
$$= 0,041P_{G4} + 9,781[\frac{UM\$}{MWh}]$$

Integrando la función de costo incremental se obtiene la función de costo de la unidad

$$C_{G4}(P_{G4}) = 9,781P_{G4} + 0,041P_{G4}^2[UM\$/h]$$
(21.4)

donde no se ha considerado el costo fijo asociado a la unidad.

21.3 Modelos de despacho uninodal y su aplicación en bolsas de energía

En esta sección se presentan los modelos de despacho denominados uninodales, los que se caracterizan por calcular un costo marginal único para todo el sistema (no diferenciando costos marginales por nodo). En estos modelos no se realiza una modelación explícita de los sistemas de transmisión, es decir, no se representan los flujos de potencia en cada uno de los tramos considerados, simplificación que presentó ventajas importantes en el manejo numérico antes de la masificación de los computadores. El costo marginal del sistema, usualmente denominado λ y expresado en [UM\$/MWh], representa el costo para el sistema de servir una unidad adicional de demanda. En el caso de utilizar los dólares como unidad monetaria, es común emplear la unidad [mills/kWh], donde 1 mills equivale a una milésima de US\$. De esta forma se mantiene la equivalencia 1 US\$/MWh = 1 mills/kWh.

En sus versiones más sofisticadas, los sistemas de transmisión son incorporados en la modelación de forma indirecta, a través de una estimación de las pérdidas óhmicas totales mediante una expresión en función de la generación de las unidades.

21.3.1 Despacho uninodal sin límites de generación

La primera aproximación desarrollada para resolver el problema de despacho de un SEP no considera las restricciones del sistema de transmisión (modelo uninodal), ni tampoco los límites de operación de las máquinas. La figura 21.3 muestra esta situación.

En este caso, las variables de optimización del sistema, son las potencias generadas por cada unidad $\mathbf{P}_{G}^{T} = [P_{G1}, ..., P_{GNG}]$ de dimensión NG (número de unidades generadoras).

Expresando los costos totales de generación de cada generador por una función de tipo cuadrático

$$C_{Gi}(P_{Gi}) = \alpha_i + \beta_i P_{Gi} + \gamma_i P_{Gi}^2 \tag{21.5}$$

el problema de optimización a resolver puede escribirse como



FIGURE 21.3. Representación uninodal del sistema

$$F.O. = Min\left\{\sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi})\right\}$$

s.a.
$$\sum_{i=1}^{NG} P_{G_i} = P_C$$
(21.6)

donde la restricción de igualdad establece el balance necesario entre la potencia generada y la demanda total del sistema P_C .

En este modelo, el procedimiento para establecer la manera económica de asignar la generación para minimizar el costo total de generación, entrega como resultado que todos los generadores operan a igual costo marginal, el cual a su vez coincide con el costo marginal del sistema. Este resultado es consecuencia de establecer las condiciones de optimalidad a la función Lagrangeana del problema de optimización expresado en 21.6.

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) + \lambda (P_C - \sum_{i=1}^{NG} P_{G_i})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Gi}} = \frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} - \lambda = 0 \quad i = 1, ..., NG$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{NG} P_{G_i} - P_C = 0$$
(21.7)

Estas condiciones de optimalidad corresponden a los puntos que satisfacen que las derivadas parciales del Lagrangeano respecto de las variables del modelo sean nulas. Cabe mencionar que la restricción de balance de potencia se podría haber escrito agrupando los términos al lado izquierdo, es decir, $\lambda (\sum_{i=1}^{NG} P_{G_i} - P_C)$, con lo que el multiplicador λ resultante tendría el signo contrario. La conveniencia de agruparlo al lado derecho es la de mantener el signo positivo de la demanda P_C , de manera que el multiplicador refleja el costo marginal del sistema, es decir, el costo del sistema

dlxvi 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

de abastecer 1 MW adicional de consumo. Asimismo, es de interés mencionar que los costos de generación de las distintas unidades han sido considerados de forma independiente, de lo que resulta que la derivada parcial de la función de costos totales de generación, respecto de una generación específica, coincide con la derivada parcial de los costos de dicha unidad respecto de su propio nivel de generación.

Del conjunto de ecuaciones 21.7 se deducen las siguientes relaciones:

$$\lambda = \beta_i + 2\gamma_i P_{Gi} \forall i = 1, ..., NG$$

$$P_{Gi} = \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i}$$
(21.8)

$$\sum_{i=1}^{NG} P_{G_i} = \sum_{i=1}^{NG} \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i} = P_C$$

$$\lambda = \frac{P_C + \sum_{i=1}^{NG} \frac{\beta_i}{2\gamma_i}}{\sum_{i=1}^{NG} \frac{1}{2\gamma_i}}$$
(21.9)

Así, el costo marginal (incremental operacional) de cada generador en el punto de operación económica es igual para todos, es decir, $\partial C_{Gi}(P_{Gi})/\partial P_{Gi} = \lambda$ (ecuación 21.7) para todos los generadores (i = 1, ..., NG). Como consecuencia de este resultado, conocido el costo marginal λ del sistema, la ecuación 21.8 permite calcular el despacho de cada generador. Asimismo, estas relaciones permiten un cálculo explícito del costo marginal del sistema en función de la información de costo y demanda del sistema (ecuación 21.9).

En el caso concreto del sistema ejemplo, el parque eólico puede ser eliminado del problema de optimización, dado que su inyección pareja de 12 MW (menor a la demanda del sistema, 430 MW) no tiene costo asociado, por lo que debería ser despachada en base. De esta forma, el problema de despacho para las unidades restantes debe considerar una demanda residual $P_C = 430 - 12 = 418$ MW.

La función de costo a minimizar es:

$$Min \ f(\mathbf{x}) = C_{G1} + C_{G2} + C_{G4}$$

en que,

$$C_{G1}(P_{G1}) = 6,5P_{G1} + 0,05P_{G1}^2[UM\$/h]$$

$$C_{G2}(P_{G2}) = 7,0P_{G2} + 0,08P_{G2}^2[UM\$/h]$$

$$C_{G4}(P_{G4}) = 9,781P_{G4} + 0,041P_{G4}^2[UM\$/h]$$

Utilizando la ecuación 21.9 y luego la ecuación 21.8 para cada generador, el resultado del despacho es:

$$\begin{split} \lambda &= \frac{418 + \left[\frac{6.5}{2 \times 0.05} + \frac{7.0}{2 \times 0.08} + \frac{9.781}{2 \times 0.041}\right]}{\left[\frac{1}{2 \times 0.05} + \frac{1}{2 \times 0.08} + \frac{1}{2 \times 0.041}\right]} = 22,711 \ [UM\$/MWh] \\ P_{G1} &= \frac{22,711 - 6.5}{2 \times 0.05} = 162,11 \ [MW] \\ P_{G2} &= \frac{22,711 - 7.0}{2 \times 0.08} = 157,69 \ [MW] \\ P_{G4} &= \frac{22,711 - 9,781}{2 \times 0.041} = 98,2 \ [MW] \end{split}$$

El costo total de producción es 6388, 43 [UM\$/h]. La condición de optimalidad puede ser comprobada calculando el costo incremental operacional de cada generador $\frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}}$ en el punto de operación señalado como óptimo y corroborando que es coincidente con el costo marginal del sistema de 22,711 [UM\$/MWh]. Esta situación se presenta gráficamente en la figura 21.4.



FIGURE 21.4. Despacho uninodal sin límites de generación

Los resultados asociados a este despacho pueden ser reproducidos, utilizando la herramienta de despacho generalizado de DeepEdit y cargando el ejemplo "Despacho Uninodal sin límites de generación" con precisiones de 0,001 tanto para la satisfacción de las restricciones como para la convergencia de los costos.

21.3.2 Despacho uninodal con límites de generación

Del resultado alcanzado en la sección anterior, se puede observar que las unidades Gen1B y Gen2B se encuentran despachadas dentro de sus límites operativos, en tanto que la unidad Gen1A no respeta su límite superior de generación de 80 MW, lo que se traduce en que el despacho económico calculado no es realista. Para superar este problema, es necesario incluir en el modelo de optimización restricciones de cota del tipo

$$\underline{P}_{Gi} \le P_{Gi} \le \overline{P}_{Gi}$$

las que, para el caso en estudio, corresponden a:

$$\begin{array}{rcrcr} 40 & \leq & P_{G1} \leq 80 \\ 70 & \leq & P_{G2} \leq 250 \\ 80 & \leq & P_{G4} \leq 200 \end{array}$$

En esta situación, las condiciones de Kühn-Tucker (K-T) complementan las condiciones de optimalidad de Lagrange, de forma que en el óptimo alcanzado se cumpla que: dlxviii 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Gi}} = \frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} = \lambda \underline{P}_{Gi} < P_{Gi} < \overline{P}_{Gi} \ i = 1, ..., NG$$

$$\frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} \leq \lambda \ P_{Gi} = \overline{P}_{Gi}$$

$$\frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} \geq \lambda \ P_{Gi} = \underline{P}_{Gi}$$
(21.10)

Lo anterior sugiere realizar nuevamente el despacho del sistema, fijando la generación de la unidad Gen1A en su nivel máximo de 80 MW. El problema de optimización a resolver en este caso puede escribirse como:

$$\begin{array}{rcl}
Min \ f(\mathbf{x}) &=& C_{G2} + C_{G4} \\
& s.a. \\
P_{G_2} + P_{G4} &=& 418 - 80 = 338 \\
& 70 &\leq & P_{G2} \leq 250 \\
& 80 &\leq & P_{G4} \leq 200
\end{array}$$
(21.11)

Las condiciones de optimalidad del problema sin restricciones son:

$$\begin{split} \lambda &= \frac{338 + \left[\frac{7,0}{2 \times 0,08} + \frac{9,781}{2 \times 0,041}\right]}{\left[\frac{1}{2 \times 0,08} + \frac{1}{2 \times 0,041}\right]} = 27,03 \quad [UM\$/MWh] \\ P_{G2} &= \frac{27,03 - 9,781}{2 \times 0,041} = 212,8 \quad [MW] \\ P_{G4} &= \frac{27,03 - 7,0}{2 \times 0,08} = 125,2 \quad [MW] \end{split}$$

Para este despacho resultante, se comprueba que la unidad Gen1A satisface la condición de K-T en 21.10, es decir,

$$\left(\frac{\partial C_{G1}(P_{G1})}{\partial P_{G1}} = 6, 5 + 2 \times 0, 05 \times 80 = 14, 5\right) \le (\lambda = 27, 03)$$

Este nuevo resultado se presenta gráficamente en la figura 21.5.

Sin embargo, este nuevo despacho tampoco resulta viable desde un punto de vista práctico, ya que la central Gen2B supera su límite máximo de generación de 200 MW. Este resultado sugiere nuevamente fijar la generación de la central Gen2B en su máximo. El problema de optimización resultante puede escribirse como:

$$Min \ f(\mathbf{x}) = C_{G2}$$
s.a.
$$P_{G_2} = 418 - 80 - 200 = 138$$

$$70 \le P_{G2} \le 250$$
(21.12)

El resultado de esta optimización es directo, de lo que se concluye el siguiente despacho de las



FIGURE 21.5. Depacho uninodal, limitando Gen1A en 80 MW

unidades del sistema:

$$\lambda = \frac{138 + \left[\frac{7,0}{2 \times 0,08}\right]}{\left[\frac{1}{2 \times 0,08}\right]} = 29,08 \ [UM\$/MWh]$$

$$P_{G1} = 80 \ [MW]$$

$$P_{G2} = 138 \ [MW]$$

$$P_{G3} = 12 \ [MW]$$

$$P_{G4} = 200 \ [MW]$$

La figura 21.6 muestra el resultado del despacho definitivo, identificándose en ella el punto de operación de cada unidad.

Para verificar la optimalidad de este punto de operación, es necesario revisar si se cumplen las condiciones de K-T para todas las unidades, con el costo marginal del sistema $\lambda = 29,08$ [UM\$/MWh], es decir,

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial C_{G1}(P_{G1})}{\partial P_{G1}} &=& 6,5+2\times 0,05\times 80 = 14,5 \ \leq \lambda \\ \frac{\partial C_{G2}(P_{G2})}{\partial P_{G2}} &=& 7,0+2\times 0,08\times 138 = 29,08 \ = \lambda \\ \frac{\partial C_{G3}(P_{G3})}{\partial P_{G3}} &=& 0 \ \leq \lambda \\ \frac{\partial C_{G4}(P_{G4})}{\partial P_{C4}} &=& 9,781+2\times 0,041\times 200 = 26,18 \leq \lambda \end{array}$$

Como se puede apreciar, el hecho de considerar los límites de operación de las unidades, hace necesario un proceso iterativo de verificación de límites, fijación de generaciones y verificación de las condiciones de K-T. En ocasiones, en particular para un número grande de unidades, este proceso puede ser complejo, ya que la fijación de la generación de un conjunto de unidades en su límite inferior o superior puede provocar que en la iteración siguiente algunas de ellas no satisfagan las





FIGURE 21.6. Despacho uninodal considerando límites de operación.

condiciones de K-T y tengan que ser consideradas nuevamente como variables de optimización. Sólo la satisfacción de las condiciones de K-T asegura que se ha alcanzado el despacho óptimo del sistema.

Una dificultad adicional en la aplicación del método expuesto, se presenta cuando la función de costo de los generadores es lineal ($\gamma_i = 0$). En este caso, la aplicación directa de la fórmula de cálculo de λ implica divisiones por cero $(\frac{1}{2\gamma_i})$. Este aparente problema en el método puede ser explicado en términos gráficos. Un costo lineal de generación se traduce en un costo incremental operacional constante, es decir, en una recta paralela al eje de las abscisas en la figura 21.6, la que no se cruza con la recta del costo marginal del sistema. En otras palabras, para la aplicación del método se debe realizar un juicio a priori sobre si el valor supuesto del costo marginal del sistema corresponde o no al costo incremental operacional de la central de costo de operación lineal. Este juicio suele apoyarse en un análisis gráfico, que permite estimar dónde se sitúa el costo marginal del sistema. Si se estima un costo marginal del sistema mayor al de la unidad lineal, corresponde excluir esta central, fijando su generación en su potencia máxima. Si el costo estimado del sistema queda por debajo del de la central lineal, corresponde solucionar el problema de optimización fijando su generación en su potencia mínima.

Los resultados asociados a este despacho pueden ser reproducidos, utilizando la herramienta de despacho generalizado de DeepEdit y cargando el ejemplo "Despacho Uninodal con límites de generación" con precisiones de 0,001 tanto para la satisfacción de las restricciones como para la convergencia de los costos.

21.3.3 Despacho uninodal considerando pérdidas óhmicas

Hasta ahora no se ha considerado la influencia del sistema de transmisión en el despacho de las unidades. Una primera consecuencia de representar los sistemas de transmisión, de importancia en sistemas interconectados de gran extensión, es incorporar el efecto de las pérdidas óhmicas. Además, al hacerlo, es posible diferenciar el efecto que cada generador tiene en las pérdidas óhmicas del sistema, según sea su ubicación relativa respecto de los centros de carga. Lo anterior puede tener consecuencias económicas importantes, ya que en el caso de dos centrales con funciones de costo similares, puede resultar que la central con mayor impacto en las pérdidas óhmicas del sistema sea despachada a mínimo técnico y no a plena carga.

Una primera solución metodológica a este problema es incorporar una expresión para las pérdidas óhmicas P_L , como función de las potencias generadas por las unidades P_{G_i} . La fórmula más general de P_L , que corresponde a un polinomio de orden dos, se conoce como fórmula de Kron:

$$P_L = B_{oo} + \sum_{i=1}^{NG} B_{oi} \ P_{G_i} + \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} P_{Gi} \ B_{ij} \ P_{Gj}$$
(21.13)

Existen distintos métodos que permiten calcular los coeficientes B_{oo} , B_{oi} y B_{ij} , entre los que destaca el uso de la matriz de sensibilidad a partir del Jacobiano del sistema (ver capítulo ??). Sin embargo, una desventaja de todos estos métodos es que el valor de los coeficientes calculados depende del punto de operación del sistema, estado que justamente corresponde al resultado del problema de despacho!! Esta aparente contradicción en el uso de este tipo de sensibilidades se supera en sistemas en que se conoce a priori el tipo de despacho al que el sistema convergerá, por lo que la aproximación introducida en su uso es adecuada. Asimismo, este problema puede ser manejado a través de un proceso iterativo que involucre un recálculo de los coeficientes.

El problema de optimización planteado de esta forma presenta la siguiente estructura general

$$F.O. = Min \left\{ \sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) \right\}$$

s.a.
$$\sum_{i=1}^{NG} P_{G_i} - P_L(P_{G1}, ..., P_{GNG}) = P_C$$

$$\underline{P}_{Gi} \le P_{Gi} \le \overline{P}_{Gi}$$
(21.14)

Las condiciones de optimalidad del problema de despacho presentado en 21.14 se establecen a partir de la Función Lagrangeana del problema y sus condiciones de optimalidad².

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) + \lambda (P_C + P_L - \sum_{i=1}^{NG} P_{G_i})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Gi}} = \frac{\partial C_{Gi}}{\partial P_{Gi}} + \lambda \left(\frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} - 1\right) = 0 \quad i = 1, ..., NG \quad (21.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{NG} P_{G_i} - P_C - P_L = 0$$

Un primer resultado importante, producto de establecer las condiciones de optimalidad, es la relación que existe entre el costo marginal del sistema y los costos de cada unidad, dada por:

$$\lambda = \frac{\partial C_{Gi}}{\partial P_{Gi}} \left(\frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}} \right) \quad i = 1, ..., NG$$

$$F_{pi} = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}}}$$

$$\lambda = \frac{\partial C_{Gi}}{\partial P_{Gi}} F_{pi}$$
(21.16)

 $^{^{2}}$ Para facilitar el análisis, no se incluye la modelación de los multiplicadores asociados a los límites de generación de las unidades generadoras.

dlxxii 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

El factor F_{pi} , conocido como **factor de penalización**, refleja la influencia de cada generador en las pérdidas óhmicas y el efecto que esto tiene en el despacho del sistema. Concretamente, suponiendo que el aumento de generación de una unidad provoca un aumento en las pérdidas del sistema, es decir $\frac{\partial P_L}{\partial P_{Gi}} > 0$, el F_{pi} correspondiente sería mayor que uno, por lo que en el óptimo, su costo incremental operacional será penalizado por un factor mayor que uno al ser igualado al costo marginal del sistema.

A diferencia del caso sin considerar pérdidas óhmicas, no es evidente que sea posible encontrar una expresión para λ que sólo dependa de la demanda y los parámetros de costo (ver ecuación 21.9). De hecho, esto sólo se logrará en casos muy particulares de la ecuación de pérdidas (ecuación 21.13).

Para solucionar este problema, se plantea generalmente el método conocido como de "*iteración* en lambda", el que utiliza la metodología de Newton-Raphson para la solución del sistema de ecuaciones no lineal, estableciendo una función de error que permite corregir el valor de λ en cada iteración. La corrección de λ implica, asimismo, una modificación de las potencias inyectadas por cada generador. Utilizando la ecuación 21.13 en 21.16 se tiene:

$$\frac{\partial C_{Gi}}{\partial P_{Gi}} = \beta_i + 2\gamma_i P_{Gi} = \frac{\lambda}{F_{pi}} = \lambda \left(1 - 2\sum_{i=1}^{NG} B_{ij} P_{Gj} - B_{oi} \right)$$

$$P_{Gi} = \frac{\lambda (1 - B_{oi}) - \beta_i - 2\lambda \sum_{i=1, i \neq j}^{NG} B_{ij} P_{Gj}}{2(\gamma_i + \lambda B_{ii})}$$
(21.17)

Sustituyendo la ecuación 21.17 en la restricción de balance nodal se obtiene:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{NG} P_{Gi} = \sum_{i=1}^{NG} \frac{\lambda(1 - B_{oi}) - \beta_i - 2\lambda \sum_{i=1, i \neq j}^{NG} B_{ij} P_{Gj}}{2(\gamma_i + \lambda B_{ii})} = P_C + P_L$$
(21.18)

Utilizando el lado izquierdo de esta ecuación $f(\lambda)$ como la función a aproximar en el método de Newton-Raphson, para la iteración k el problema queda expresado por:

$$f(\lambda)^{[k]} = \sum_{i=1}^{NG} \frac{\lambda^{[k]}(1 - B_{oi}) - \beta_i - 2\lambda^{[k]} \sum_{i=1, i \neq j}^{NG} B_{ij} P_{Gj}^{[k]}}{2(\gamma_i + \lambda^{[k]} B_{ii})} = P_C + P_L^{[k]}$$
(21.19)

Realizando la expansión en serie de Taylor de la función $f(\lambda)$ y despreciando los términos de orden superior, se tiene

$$f(\lambda)^{[k]} + \left(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^{[k]} \nabla \lambda^{[k]} = P_C + P_L^{[k]}$$
$$\nabla \lambda^{[k]} = \frac{P_C + P_L^{[k]} - f(\lambda)^{[k]}}{\left(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^{[k]}}$$

en que,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} \end{pmatrix}^{[k]} = \sum_{i=1}^{NG} \frac{\gamma_i (1 - B_{oi}) - B_{ii}\beta_i - 2\gamma_i \sum_{i=1, i \neq j}^{NG} B_{ij} P_{Gj}^{[k]}}{2(\gamma_i + \lambda^{[k]} B_{ii})^2}$$
$$\lambda^{[k+1]} = \lambda^{[k]} + \nabla \lambda^{[k]}$$

Para el caso ejemplo en estudio, se supondrá la siguiente versión simplificada de la función de costo:

$$P_L = \sum_{i=1}^{NG} B_{ii} P_{Gi}^2$$
(21.20)

$$B_{11} = 2,5 \times 10^{-5}; B_{22} = 2,5 \times 10^{-5}; B_{33} = 3,0 \times 10^{-5}; B_{44} = 3,0 \times 10^{-5}$$
(21.21)

Aprovechando el resultado de la sección anterior, se empleaarán las siguientes condiciones iniciales en el modelo:

La corrección del valor de λ se realiza evaluando la función:

$$\nabla \lambda^{[0]} = \frac{P_C + P_L^{[0]} - f(\lambda)^{[0]}}{\left(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^{[0]}}$$

$$P_C = 138 [MW]$$

$$f(\lambda)^{[0]} = \sum_{i=1}^{NG} \frac{\lambda^{[0]} - \beta_i}{2(\gamma_i + \lambda^{[0]}B_{ii})} = \frac{\lambda^{[0]} - \beta_2}{2(\gamma_2 + \lambda^{[0]}B_{22})} = 136,76$$

$$P_L^{[0]} = \sum_{i=1}^{NG} B_{ii} P_{Gi}^{2[0]} = 1,832 [MW]$$

$$\left(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^{[0]} = \sum_{i=1}^{NG} \frac{\gamma_i - B_{ii}\beta_i}{2(\gamma_i + \lambda^{[0]}B_{ii})^2} = \frac{\gamma_2 - B_{22}\beta_2}{2(\gamma_2 + \lambda^{[0]}B_{22})^2} = 6,125$$

$$\nabla \lambda^{[0]} = \frac{138 + 1,85 - 139,27}{6,35} = 0,502$$

$$\lambda^{[1]} = 29,08 + 0,502 = 29,582$$

$$\nabla \lambda^{[1]} = \frac{138 + 1,85 - 139,84}{6,35} = 0,001$$

$$\lambda^{[1]} = 29,17 + 0,002 = 29,583$$

$$P_{G2} = 139,853 [MW]$$

Se aprecia que en la segunda iteración ya se ha alcanzado una tolerancia pequeña (0,001) para el valor de λ , por lo que no es necesario iterar por tercera vez. Sin embargo, es necesario comprobar si el despacho resultante es un óptimo global, particularmente para aquellos generadores que no fueron considerados en la optimización.

En este caso, las condiciones de K-T que complementan las condiciones de optimalidad de Lagrange, son de la forma,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Gi}} = \frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} F_{Pi} = \lambda \underline{P}_{Gi} < P_{Gi} < \overline{P}_{Gi} \ i = 1, ..., NG$$

$$\frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} F_{Pi} \leq \lambda \ P_{Gi} = \overline{P}_{Gi}$$

$$\frac{\partial C_{Gi}(P_{Gi})}{\partial P_{Gi}} F_{Pi} \geq \lambda \ P_{Gi} = \underline{P}_{Gi}$$
(21.22)

dlxxiv 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

Con el costo marginal del sistema $\lambda = 29,583 [UM\$/MWh]$, las condiciones se verifican con,

$$F_{pi} = \frac{1}{1 - 2P_{Gi}B_{ii}}$$

$$\frac{\partial C_{G1}(P_{G1})}{\partial P_{G1}}F_{p1} = (6, 5 + 2 \times 0, 05 \times 80) \times 1,004 = 14,56 \le \lambda$$

$$\frac{\partial C_{G2}(P_{G2})}{\partial P_{G2}}F_{p2} = (7, 0 + 2 \times 0,08 \times 139,853) \times 1,007 = 29,58 = \lambda$$

$$\frac{\partial C_{G3}(P_{G3})}{\partial P_{G3}}F_{p3} = 0 \le \lambda$$

$$\frac{\partial C_{G4}(P_{G4})}{\partial P_{G4}}F_{p4} = (9,781 + 2 \times 0,041 \times 200) \times 1,012 = 26,50 \le \lambda$$

Se comprueba así que, en la medida que al caso ejemplo se le agregan restricciones que buscan reflejar de mejor forma la realidad, es decir, se resuelve un problema de optimización con más restricciones, el costo marginal del sistema se incrementa de $\lambda = 22,711$ (caso irrestricto), $\lambda = 29,08$ (considerando límites de generación) a $\lambda = 29,583$ (considerando límites de generación y pérdidas óhmicas).

Para confirmar los resultados presentados en esta sección se sugiere ingresar a las aplicaciones de apoyo, luego a "Despacho Económico". Una vez en éste se ingresa al ítem Ejemplo Gráfico, donde se puede observar los mismos valores iniciales que en este problema, al presionar el boton 'Acción' se comprueban los resultados. Además, es recomendable hacer un análisis de sensibilidad variando levemente alguno de los parámetros de las ecuaciones de costo y observando el correspondiente cambio en el despacho económico.

Es importante señalar que el análisis presentado hasta este punto tiene fundamentalmente una finalidad pedagógica, ya que se han definido conceptos importantes, tales como costo incremental operacional, costo marginal del sistema, factor de penalización, condiciones de optimalidad, etc. En la práctica actual, la industria utiliza modelos matemáticos y computacionales más sofisticados. Por ello, en la siguiente subsección y secciones, con base en los conceptos discutidos previamente, se presentan los modelos en uso para resolver el problema de despacho en sistemas reales.

21.3.4 Bolsa de energía uninodal

Hoy en día, los modelos uninodales encuentran una aplicación práctica en los mercados con bolsas de energía uninodales. El modelo básico subyacente corresponde al despacho uninodal, con costos de generación lineales, considerando límites de generación por bloques y despreciando el efecto de las pérdidas óhmicas. Usualmente, este tipo de bolsas se organizan para un mercado diario (en realidad mercado del día siguiente o "*day-ahead market*" en inglés) en etapas horarias, donde el operador del mercado recibe ofertas de venta y compra de energía.

Las ofertas corresponden a bloques de potencia, denominados BMW_{ij} a los que se les asocia un precio PP_{ij} , de venta o compra, según corresponda. Cada oferta (*i*) puede contener más de un bloque (*j*). En el caso del mercado español, cada oferta puede estar constituida hasta por 25 bloques.

La figura 21.7 busca ejemplificar este tipo de mercados a través del caso de un sistema con dos ofertas de venta y dos ofertas de compra, cada una de ellas compuesta por dos bloques.

Se aprecia que, mientras las ofertas de venta son de precios crecientes, las ofertas de compra son de precios decrecientes, en analogía con lo que sucede con las curvas de oferta y demanda, respectivamente. En la tercera columna de la figura 21.7 se aprecia en forma gráfica el proceso de casación que realiza el operador del mercado. Los bloques de ofertas de venta son ordenados en forma creciente, en tanto que los de compra en forma decreciente. De esta forma se obtienen las curvas agregadas de oferta y demanda mostradas en el gráfico inferior derecho de la figura. El operador de mercado debe maximizar el excedente social, área de forma triangular punteada. De



FIGURE 21.7. Ejemplo de mercado basado en bolsa de energía.

esta forma, el sistema será despachado en el punto de operación señalado por un círculo, el que permite asimismo determinar el costo marginal del sistema o precio resultante del mercado para la hora h (en inglés "market clearing price").

Matemáticamente, este problema de despacho puede ser formulado a través del siguiente problema de optimización:

$$F.O. = Min\left\{\sum_{i=1}^{NOV}\sum_{j=1}^{NB}PP_{ij}^{V} \times BMW_{ij}^{V} - \sum_{i=1}^{NOC}\sum_{j=1}^{NB}PP_{ij}^{C} \times BMW_{ij}^{C}\right\}$$

s.a.
$$\sum_{i=1}^{NOV}\sum_{j=1}^{NB}BMW_{ij}^{V} = \sum_{i=1}^{NOC}\sum_{j=1}^{NB}BMW_{ij}^{C}$$
$$0 \le BMW_{ij}^{V} \le \overline{BMW}_{ij}^{V} \forall i, j$$
$$0 \le BMW_{ij}^{C} \le \overline{BMW}_{ij}^{C}$$
$$(21.23)$$

donde el superíndice "V" se refiere a ofertas de venta y el "C" a ofertas de compra. El sistema supone asimismo NOV ofertas de venta y NOC ofertas de compra, con un número máximo de NB bloques para cada oferta.

Este tipo de modelos presenta tres características que es necesario comentar:

- Si se considera una demanda completamente inelástica, donde la cantidad demandada de energía eléctrica no varía ante variaciones proporcionales del precio (en otras palabras, la curva de demanda corresponde a una línea paralela al eje de las ordenadas); el problema presentado en 21.23 corresponde exactamente al resuelto para el despacho uninodal con costos de generación lineales y sin consideración del efecto de las pérdidas óhmicas.
- Se aprecia una dificultad en representar los mínimos técnicos de las centrales generadoras, ya que el límite inferior de cada bloque es cero. En sistemas reales, este problema ha sido abordado por la vía de permitir que el agente oferente declare la indivisibilidad del primer bloque ofertado, restricción que tiene que ser incorporada al modelo de optimización.

dlxxvi 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

• Este tipo de modelación no permite una representación directa de curvas de costo de generación cuadráticas (costos incrementales lineales con pendiente positiva). Para esto, el agente puede ofertar bloques con precios crecientes de energía, que reflejen de alguna forma el comportamiento de la curva de costo incremental operacional.

En el ejemplo estudiado, se supondrá primeramente una demanda inelástica de 480 MW y una aproximación lineal en dos tramos de las curvas de costo incremental operacional de las unidades. El primer bloque corresponderá a la potencia mínima de generación, mientras que el segundo se supondrá igual al costo incremental operacional medio del bloque. La tabla 21.4 y la figura 21.8 resumen las ofertas BMW_{ij} de una potencia máxima \overline{BMW}_{ij} a precios PP_{ij} de cada unidad.

				0		
Oferta	Unidad	Nodo	\overline{BMW}_{i1}^V	PP_{i1}^V	\overline{BMW}_{i2}^V	PP_{i2}^V
i			[MW]	[UM\$/MWh]	[MW]	[UM\$/MWh]
1	Gen1A	Nod1	40	10,5	40	12,5
2	Gen1B	Nod1	70	18,2	180	$32,\!6$
3	Gen2A	Nod2	12	0	-	-
4	Gen2B	Nod2	80	16,34	120	21,26

TABLE 21.4. Ofertas de venta de generadores



FIGURE 21.8. Curvas de oferta de cada generador

Las flechas muestran los rectángulos que corresponden a cada uno de los bloques ofertados (\overline{BMW}, PP) . La solución de este problema se estructura a partir de las ecuaciones en 21.23; y ella puede apreciarse en forma gráfica en la figura 21.9.

La curva de demanda se cruza con la curva agregada de oferta en el tramo horizontal entre 362 MW y 542 MW, quedando este último bloque con una cantidad $BMW_{22} = 68 MW$ comprometida, a un precio de 32,6 UM\$/MWh. El punto señalado en círculo corresponde al resultado del mercado. En términos matemáticos, este enfoque corresponde al de un problema de optimización lineal con cotas, lo que lo hace muy atractivo para ser resuelto, para grandes SEP, a través de rutinas de optimización comerciales.



FIGURE 21.9. Curva de oferta agregada y resultado del mercado

Cargando el caso ejemplo de DeepEdit "Despacho Bolsa de Energia" y utilizando la herramienta de despacho generalizado de Deepedit se puede comprobar este resultado.

Para estudiar el efecto que tiene la incorporación de una demanda elástica sobre el resultado del mercado, se considerarán las ofertas de compra de dos bloques detalladas en la tabla 21.5.

THEFT 21.0. Official de compta						
Oferta	Consumidor	Nodo	\overline{BMW}_{i1}^C	PP_{i1}^C	\overline{BMW}_{i2}^C	PP_{i2}^C
i			[MW]	[UM\$/MWh]	[MW]	[UM\$/MWh]
1	C1	Nod1	200	40	100	25
2	C3	Nod3	100	40	100	30

TABLE 21.5. Ofertas de compra

En este caso, las curvas agregadas de oferta y demanda son las mostradas en la figura 21.10. La curva de demanda corta horizontalmente a la curva de oferta en un precio de 30 UM /MWhy una potencia de 362 MW. Se aprecia además, que el último bloque de oferta BMW_{22}^V no es despachado, por lo que existen 138 MW de demanda no suministrados al precio resultante.

El hecho de que las curvas de oferta (venta y compra) presenten una estructura escalonada, produce, en algunos casos, ambigüedad en el resultado del mercado. Por ejemplo, en este caso, se podría argumentar que para cualquier precio entre 21,26 y 30 UM\$/MWh se produce un equilibrio en el mercado, ya que se cumple con el objetivo de maximizar el beneficio social (sumas de los excedentes de consumidores y productores). Sin embargo, el costo para el sistema de abastecer 1 MW adicional del BMW_{22}^C , corresponde al costo de no abastecerlo, es decir 30 UM\$/MWh. En algunas situaciones de corte de ambas curvas, las respuestas no son evidentes. Esto sucede cuando dos o más agentes ofertan bloques a un mismo precio, que coincide con el precio resultante del mercado. La solución usual ha sido aplicar un prorrateo en función de los MW asociados a cada oferta.

Situaciones como las mencionadas han tenido que ser incluidas como sucesos especiales en las reglamentaciones, siguiendo en general, el criterio de favorecer en precio y cantidad al consumidor, de forma que el generador marginal sea remunerado de acuerdo con el precio ofertado.

Cargando el caso ejemplo de DeepEdit "Despacho Bolsa de Energia con ofertas de compra" y





FIGURE 21.10. Ofertas agregadas con demanda elástica

utilizando la herramienta de despacho generalizado de Deepedit se puede comprobar este resultado.

21.4 Modelos de despacho basados en flujos de potencia lineales

Los modelos uninodales de despacho considerados hasta el momento, no son capaces de reflejar el efecto de las congestiones del sistema de transmisión ni la diferenciación de costos marginales por barra. Debido a esto, ha sido necesario el desarrollo de modelos de tipo multinodal, los que tienen una vasta aplicación en mercados eléctricos actuales, donde interesa reflejar las congestiones, y en segundo término, las pérdidas óhmicas en la red.

La forma más sencilla de incluir estos efectos (sistema multinodal) hace uso del flujo de potencia lineal, o flujo DC. Esta herramienta fue presentada en la sección, junto con una discusión sobre las condiciones que debe cumplir un sistema para que su aplicación sea válida. Un modelo de despacho que utilice esta representación multinodal de la red, se plantea como un problema de optimización de función objetivo cuadrática y restricciones no lineales de igualdad y desigualdad. Usualmente el sistema es representado en pu.

21.4.1 Variables

El vector de variables \mathbf{x}_E del problema de despacho basado en un flujo de potencia lineal está compuesto por las potencias activas generadas por cada unidad, agrupadas en el vector \mathbf{P}_G de dimensión NG; las potencias activas no servidas de cada uno de los consumos, representadas por el vector \mathbf{P}_U de dimensión ND (número de consumos); y los ángulos de fase de cada tensión de barra $\boldsymbol{\theta}$, de dimensión NN (número de nodos). Los dos primeros grupos de variables corresponden a variables de decisión dentro del problema de optimización, mientras que los ángulos de fase de las tensiones serían consecuencia de las primeras y sirven para establecer el estado de operación estacionario del sistema eléctrico, el que a su vez permite calcular y restringir los flujos por las

21. Modelos de despacho en mercados eléctricos dlxxix

conexiones de la red. De esta forma,

$$\mathbf{x}_E = [\mathbf{P}_G, \mathbf{P}_U, \boldsymbol{\theta}]^T \tag{21.24}$$

21.4.2 Función objetivo

La finalidad del despacho económico es la minimización de los costos variables de generación de potencia activa y de las potencias activas no servidas en las cargas del sistema. Para este cálculo, se suponen conocidas las unidades que están en operación y consecuentemente, los límites de operación que es necsario respetar. Su estructura general es la de la ecuación 21.25, que corresponde a una función objetivo de tipo cuadrática. En ella, se agrupan las funciones de costos cuadráticos, de potencias generadas y potencias no servidas.

$$F.O. = Min\left\{\alpha_E + \mathbf{c}_E^T \mathbf{x}_E + \frac{1}{2}\mathbf{x}_E^T \mathbf{Q}_E \mathbf{x}_E\right\}$$
(21.25)

El costo de la potencia no servida busca reflejar el valor para el sistema de no poder abastecer plenamente el consumo. Depediendo del tipo de estudio que se esté realizando, éste puede corresponder al costo de falla de corta duración o bien, en un enfoque de planificación, al costo de racionamiento. Este costo puede ser representado por una función función cuadrática, creciente con la profundidad de la falla:

$$C_{Ui}(P_{Ui}) = \beta_i P_{Ui} + \gamma_i P_{Ui}^2 \tag{21.26}$$

Se define como profundidad de falla al porcentaje del consumo que no es abastecido, mientras que el término duración o extensión de una falla indica el intervalo de tiempo que dura la interrupción de servicio. Cabe señalar que en este caso no existe un costo fijo de falla, ya que la situación de pleno abastecimiento no debiera generar costos adicionales al sistema (ver figura 21.11).



FIGURE 21.11. Costo de demanda no servida

Los coeficientes del vector \mathbf{c}_E distintos de cero son los coeficientes lineales de los costos de generación térmica y de la potencias no servidas. La matriz del modelo cuadrático \mathbf{Q}_E es diagonal

dlxxx 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

y, de igual forma, sus coeficientes distintos de cero son la mitad de los coeficientes cuadráticos de los costos térmicos y de potencias no servidas. La constante α_E representa la suma de los costos fijos de los generadores del sistema.

21.4.3 Cotas de generación, potencia no servida y ángulos de fase

La potencia generada por una central i, con independencia de su naturaleza, debe encontrarse dentro de límites técnicos determinados por diseño, limitaciones de combustible o mantenimientos. En cualquier caso, la restricción adopta similar forma, cambiando sólo el valor de los parámetros.

$$P_{Gi} \le P_{Gi} \le \overline{P_{Gi}} \ \forall i \in NG \tag{21.27}$$

El límite superior está determinado por la capacidad máxima de generación, mientras que el límite inferior corresponde a mínimos técnicos, bajo los cuales, no pueden o no deberían operar las unidades de generación. Si bien los mínimos técnicos son más característicos de las centrales térmicas, en las que se requiere de una potencia mínima para mantener operativa la caldera o turbina a gas, también existen en las centrales hidráulicas, que deben operar por sobre un mínimo, para evitar la cavitación, que reduce la vida útil de las turbinas.

Por otro lado, la cantidad de potencia no servida representa la porción de potencia de la carga no abastecida por el sistema. De este modo:

$$0 \le P_{Ui} \le P_{Ci} \ \forall i \in ND \tag{21.28}$$

Por último, si bien no se asocia límites a los ángulos de fase de las tensiones en las barras, usualmente se define un rango en el cual el método de optimización debe encontrar la solución. A modo de ejemplo, el ángulo medido en radianes puede ser restringido a,

$$-2\pi \le \theta_i \le 2\pi \ \forall i \in NN \tag{21.29}$$

De esta forma, el vector de variables de optimización queda acotado de acuerdo con la siguiente expresión general:

$$\mathbf{x}_E \le \mathbf{x}_E \le \overline{\mathbf{x}_E} \tag{21.30}$$

21.4.4 Pérdidas óhmicas

De lo ya visto en el capítulo ??, si se designa con P_{ik} a la potencia activa inyectada al sistema en la barra *i*, desde la línea de transmisión que une los nodos *i* y *k*, la ecuación que la relaciona con las tensiones de barra del sistema y establece los flujos de potencia activa, habiendo despreciado el efecto de la conductancia paralelo, es la siguiente:

$$P_{ik} = G_{i,k} (V_i^2 - V_i V_k \cos(\theta_i - \theta_k)) - B_{ik} V_i V_k sen(\theta_i - \theta_k)$$
(21.31)

Expresando $G \neq B$ en términos de la impedancia de rama, ello equivale a:

$$G_{ik} + jB_{ik} = (r_{ik} - jx_{ik})/(r_{ik}^2 + x_{ik}^2)$$
(21.32)

Utilizando parcialmente las simplificaciones ya aceptadas en el caso del flujo de potencia lineal tratado en la sección 21.4,

$$V_i \approx V_k \approx 1 \ [pu]; \ \theta_i - \theta_k \approx 0 \ [rad]; \ r_{ik} \ll x_{ik}$$
(21.33)

más específicamente,

$$sen(\theta_i - \theta_k) \approx \theta_i - \theta_k r_{ij}^2 + x_{ij}^2 \approx x_{ij}^2 \to b_{ij} \approx -1/x_{ij}$$

$$(21.34)$$

Estas aproximaciones, al ser aplicadas al resultado de (21.31), permiten alcanzar expresiones más sencillas:

$$P_{ik} = g_{ik}(1 - \cos(\theta_i - \theta_k)) - b_{ik}(\theta_i - \theta_k)$$
(21.35)

Se aprecia que el término

$$P_{ik} = -b_{ik}(\theta_i - \theta_k) = 1/x_{ij}(\theta_i - \theta_k)$$
(21.36)

coincide con el flujo de potencia activa definido para el flujo de potencia lineal, en tanto que $g_{ik}(1 - \cos(\theta_i - \theta_k))$ corresponde a la mitad de las pérdidas óhmicas P_{Lik} del tramo, dado que:

$$P_{Lik} \approx P_{ik} + P_{ki} = 2 g_{ik} (1 - \cos(\theta_i - \theta_k))$$

$$(21.37)$$

La aproximación de las pérdidas dadas por la ecuación 21.37 es utilizada en los programas comerciales de despacho. Sin embargo, se puede hacer uso de una simplificación adicional, al introducir las aproximaciones,

$$\frac{1 - \cos(\theta_i - \theta_k)}{r_{ik}/(r_{ik}^2 + x_{ik}^2)} \approx \frac{(\theta_i - \theta_k)^2}{r_{ik}/x_{ik}^2}$$
(21.38)

con lo que se obtiene la siguiente expresión para las pérdidas óhmicas en la línea:

$$P_{Lik} \approx 2 r_{ik} \frac{(\theta_i - \theta_k)^2}{2x_{ik}^2} = r_{ik} \frac{(\theta_i - \theta_k)^2}{x_{ik}^2} = r_{ik} P_{ik}^2$$
(21.39)

Esta expresión, que relaciona las pérdidas óhmicas con el cuadrado del flujo de potencia activa transferido del nodo i al k, es la aproximación más utilizada en modelos de despacho basados en flujos de potencia lineal. Cabe mencionar que las aplicaciones que utilizan estos modelos, realizan usualmente una aproximación lineal por partes de la función de pérdidas, lo que facilita su incorporación en rutinas eficientes de optimización lineal.

La figura 21.12 muestra la comparación entre ambas aproximaciones.



FIGURE 21.12. Comparación entre modelos aproximados de pérdidas óhmicas

dlxxxii 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

Se aprecia que para desfases pequeños ambas aproximaciones son muy parecidas, mientras que para diferencias angulares mayores, la expresión cuadrática 21.39 estima pérdidas levemente mayores. Sin embargo, es importante mencionar que esta aproximación sólo es válida para sistemas en que la razón $r_{ij}/x_{ij} < 0.25$. Para valores mayores la aproximación introduce distorsiones importantes en los análisis y resultados.

21.4.5 Balances de potencia en barras

La suma de todas las potencias activas inyectadas y retiradas en una barra, más las pérdidas de transmisión en la red asociadas a flujos desde o hacia la barra, debe ser nula. Del modelo de flujo de potencia lineal y de las ecuaciones de pérdidas óhmicas presentadas en la sección anterior, se obtiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{j \in \Omega_i^G} P_{G_j} - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} + \frac{P_{Lik}}{2} \right) + \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{U_j} = \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{C_j} \quad \forall i \in NN$$

donde:

 Ω_i^G : Conjunto de índices de generadores conectados a la barra *i*.

 Ω_i^N : Conjunto de índices de barras conectadas a la barra *i*, por algún equipo de transmisión.

 $\Omega^C_i:$ Conjunto de índices de cargas conectadas a la barrai.

 P_{C_j} : Parámetro de potencia activa demandada por la carga j.

La figura 21.13 ejemplifica el tratamiento de los balances nodales para un sistema de tres barras con un solo consumo por nodo.



FIGURE 21.13. Balances nodales en un sistema de 3 barras

En algunos modelos se reemplaza la igualdad por una desigualdad (en este caso \geq), para poder garantizar la convexidad del espacio factible, lo que, con la salvedad de casos excepcionales, no afectará el óptimo del problema, ya que los costos del sistema llevarán a que se satisfaga esta restricción en la igualdad. El hecho de mantener la condición de igualdad permite la aparición de costos marginales negativos, caso que será analizado más adelante.

21.4.6 Límites de flujos por las líneas o equipos de conexión

Los flujos por las líneas o equipos de transmisión deben encontrarse dentro de ciertos márgenes impuestos. El valor máximo tolerable para la potencia activa que circula por el equipo es el menor valor entre varios límites, resultantes de estudios especializados. Entre estas limitantes se pueden mencionar: capacidad física máxima producto de un límite térmico, adopción de un factor de potencia típico, criterio de seguridad N-1, mantenimiento o reparación de circuitos, limitaciones a flujos por razones de seguridad del servicio (estabilidad), etc. Esto puede llevar a situaciones en que los límites del fluio por una conexión no se imponen de forma simétrica en uno u otro sentido. El flujo medio por una línea se identifica de la ecuación (21.36), de modo que las restricciones pueden imponerse sobre los ángulos de la tensión. Así,

$$\begin{aligned} \theta_i - \theta_j &\leq x_{ij} \overline{P}_{ij} \ \forall (i,j) \in \Omega^{NN} \\ \theta_j - \theta_i &\leq x_{ij} \overline{P}_{ji} \end{aligned}$$
(21.40)

donde Ω_i^{NN} representa el conjunto de índices i, j de barras conectadas por algún equipo de transmisión. La dimensión NL de este conjunto corresponde en términos prácticos a la suma de las líneas de transmisión y transformadores presentes en el sistema. En un sentido estricto, el valor del límite superior \overline{P}_{ij} o \overline{P}_{ji} debe incorporar las pérdidas de transmisión, puesto que la potencia que se inyecta al equipo de transmisión desde una barra, las incluye (según lo establece la ecuación 21.35), debiendo calcularse su valor resolviendo la ecuación cuadrática respectiva. No obstante, dado que el valor del límite es una estimación que pasa por inferir un factor de potencia para el flujo, esta precisión pierde relevancia, aceptándose un límite que sólo refleje la limitación del equipo en forma aproximada.

21.4.7 Problema de optimización para el despacho multinodal

El modelo de despacho económico multinodal, con representación de pérdidas óhmicas y límites de transmisión, puede ser expresado por el siguiente problema de optimización para el vector de optimización $\mathbf{x}_E = [\mathbf{p}_G, \mathbf{p}_U, \boldsymbol{\theta}]^T$:

$$F.O. = Min\left\{\sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{ND} C_{Ui}(P_{Ui})\right\} = Min\left\{\alpha_E + \mathbf{c}_E^T \mathbf{x}_E + \frac{1}{2}\mathbf{x}_E^T \mathbf{Q}_E \mathbf{x}_E\right\}$$

s.a. (21.41)

s.a.

$$\sum_{j \in \Omega_i^G} P_{G_j} - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} + \frac{P_{Lij}}{2} \right) + \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{U_j} = \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{C_j} \ \forall i \in NN$$
$$\theta_i - \theta_j \le x_{ij} \overline{P}_{ij} \ \forall (i,j) \in \Omega^{NN}$$
$$\theta_j - \theta_i \le x_{ij} \overline{P}_{ji}$$
$$\underline{\mathbf{x}}_E \le \mathbf{x}_E \le \overline{\mathbf{x}}_E$$

Donde F.O. es una función cuadrática que representa los costos totales de operación del sistema. El primer grupo de restricciones corresponde a NN restricciones no lineales de igualdad, que representan los balances de potencia en cada nodo. Las $2 \times NL$ restricciones lineales de desigualdad representan los límites de transmisión. Por último, cada una de las variables de optimización tiene asociadas una cota inferior y superior.

Para resolver este problema de optimización, se han propuesto diversas metodologías. Un tratamiento común es el de linealizar por partes las funciones no lineales del problema, con el fin de aprovechar la eficiencia y robustez de los paquetes comerciales que permiten optimizar problemas lineales, tales como CPLEX, Minos, Xpres, LINDO. Asimismo, se han aplicado métodos iterativos de resolución de problemas cuadráticos, aprovechando las características cuadráticas de la función objetivo y de la función de pérdidas. Este tipo de modelos también se apoya usualmente en optimizadores comerciales incluidos en los paquetes de optimización, como Minos, Matlab o CPLEX.

Cabe mencionar que este problema de optimización, si bien presenta una función objetivo convexa, no es convexo en el dominio de solución, producto de las ecuaciones de pérdidas. Esta situación

dlxxxiv 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

se comprueba en los nodos esencialmente importadores, donde las funciones de flujo $\frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}}$ tienen signo contrario al de las pérdidas óhmicas medias $\frac{P_{Lij}}{2}$. Consecuentemente, el balance nodal con la demanda P_C se satisface en puntos separados del dominio (ver figura 21.14). Para sistemas reales, esta falta de convexidad por efecto de las pérdidas óhmicas no tiene implicancias prácticas. Sin embargo, se observa que la existencia de congestiones puede provocar problemas de convergencia en sistemas reales, particularmente en algoritmos que utilizan una linealización por partes de la función de pérdidas óhmicas. El problema de convergencia se manifiesta en que efectivamente las soluciones alcanzadas no tienen sentido físico, ya que las variables asociadas a los primeros tramos del modelo linealizado tienen valor cero, en tanto que aquellas asociadas a desfases mayores son distintas de cero (curva $P_{ij} - \frac{P_{Lij}}{2}$ (flujo que llega al nodo j) de la figura 21.14).



FIGURE 21.14. Efecto en convexidad de la función de pérdidas óhmicas

21.4.8 Costos marginales de generación

Los multiplicadores de Lagrange λ_i asociados a las restricciones de balance nodal del problema de optimización en 21.41, definen en la mayoría de los casos el costo ρ_i para el sistema de suministrar una unidad adicional de potencia activa en el nodo correspondiente, los que se conocen como **costos** marginales de generación o precios puntuales de la electricidad (del inglés "spot price").

El Lagrangeano del problema tiene la estructura:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{ND} C_{Ui}(P_{Ui}) \\ + \sum_{i=1}^{NN} \lambda_i \left[\sum_{j \in \Omega_i^C} P_{C_j} - \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{G_j} + \sum_{j \in \Omega_i^N} \left(\frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} + \frac{P_{Lij}}{2} \right) - \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{U_j} \right]$$
(21.42)
+....
+ $\mu_i (P_{Ci} - P_{Ui})$
+....

Se aprecia que para un incremento en la demanda P_{Ci} intervienen sólo los multiplicadores λ_i y μ_i . En el caso de λ_i , y dado que se trata de una restricción de igualdad, no es posible establecer a priori el valor ni signo que tendrá (este puede ser incluso negativo!). Sin embargo, λ_i reflejará usualmente el costo incremental operacional de la o las centrales marginales en el sistema, habida consideración del efecto de las pérdidas óhmicas y congestiones. En cuanto al multiplicador μ_i , dado que proviene de una restricción de cota de una variable de optimización, éste sólo será distinto de cero en el caso de que la potencia no servida sea igual a la demanda correspondiente $P_{Ci} = P_{Ui}$. En este caso, el multiplicador tiene efecto sobre el precio puntual de la electricidad, de forma que $\rho_i = \lambda_i + \mu_i$.

En un SEP, los precios puntuales de la electricidad ρ_i se definen como los costos marginales de generación a corto plazo, incluida una diferenciación, tanto espacial (en cada nodo k) como temporal (en cada instante t). Para un nodo determinado, indican el costo asociado a un incremento de la potencia inyectada en el sistema, necesario para responder a incrementos de carga experimentados en dicho nodo.

De la definición, se desprende el carácter dinámico de los precios puntuales, el cual se debe a su variación en el tiempo y dependencia de las condiciones del sistema, condiciones que están estrechamente relacionadas con las decisiones de operación del mismo.

Los costos marginales de generación en un sistema eléctrico de potencia son considerados como una señal eficaz de estímulo a la eficiencia económica de los sistemas eléctricos, proporcionando a los diferentes participantes una información precisa sobre el impacto de sus acciones en los costos de suministro.

El análisis de los precios puntuales debe hacerse bajo un esquema de operación óptima del sistema, con el fin de que las señales entregadas se reflejen en condiciones acordes con la realidad del sistema. Los precios puntuales describen adecuadamente las características del sistema: las zonas desadaptadas, las zonas de generación, las barras de difícil acceso, entre otras. En general, el valor de los costos marginales depende de:

- Decisiones de predespacho del sistema,
 - Curvas de costos de los generadores,
 - Distribución de la demanda en los distintos nodos,
 - Parámetros físicos y capacidad de las líneas de transmisión,
 - Parámetros físicos y capacidad de los transformadores,
 - Curvas de costo asociadas a falla en el sistema.

La herramienta de despacho económico permite realizar una buena estimación de los ρ_i , al ser utilizada en forma iterativa, de acuerdo con las condiciones de predespacho que se definan para un período de operación determinado.

Tradicionalmente, el costo marginal de generación en las barras es presentado como una función lineal de distintos efectos superpuestos, dlxxxvi 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

$$\rho_i = \lambda \left(1 + \frac{\partial P_L}{\partial P_{Ci}} \right) + \zeta \frac{\partial \overline{P}_{ij}}{\partial P_{Ci}} + \gamma \frac{\partial \overline{V}}{\partial P_{Ci}}$$
(21.43)

En el cálculo de ρ_i interviene el costo marginal del sistema λ , el que es penalizado por el efecto en las pérdidas óhmicas P_L de una variación de la demanda P_{Ci} . A esto se suma el efecto en las congestiones del sistema, reflejado en el producto del costo de congestión ζ con el efecto de la variación de demanda en estos límites. Por último, se agrega el efecto de la variación de la demanda en los límites de las tensiones del sistema, a través del costo marginal de límites de tensión del sistema γ , multiplicado por el efecto en estos límites de tensión de las variaciones de la demanda.

Esta desagregación es conceptualmente correcta, ya que las variaciones de demanda influyen en los tres ámbitos antes mencionados. Sin embargo, en el modelo de despacho económico presentado en 21.41 no es posible una desagregación formal en estos componentes. Debido a la sobredeterminación del problema, se hace necesario tomar una barra de referencia para poderlo definir. De hecho, desde el momento en que se identifica un costo marginal por barra, el concepto de costo marginal del sistema λ se torna ambiguo.

21.4.9 Ejemplo de aplicación

En el ejemplo estudiado, se supondrá primeramente el problema de despacho económico multinodal con representación de pérdidas óhmicas (ecuación 21.37) y sin límites de transmisión. El sistema supone un único voltaje base de $V_{base} = 220 \ kV$ y una potencia base de $S_{base} = 100 \ MVA$. En la figura 21.15 se muestran los resultados asociados al despacho, utilizando la herramienta de despacho generalizado de DeepEdit y cargando el caso "Despacho multinodal", no considerando límites de transmisión, con precisiones de 0,001 tanto para la satisfacción de las restricciones como para la convergencia de los costos.



FIGURE 21.15. Despacho económico multinodal con pérdidas óhmicas, sin límites de transmisión

Se aprecia que la unidad Gen1B queda como unidad marginal, con una potencia de 141,01 MW. De hecho, su costo incremental operacional coincide con el costo marginal del nodo 1, $\lambda_1 = 29,56$ [UM\$/MWh]. El costo marginal asociado al nodo 2 es inferior, $\lambda_2 = 28,89$ [UM\$/MWh], lo que se justifica, dado que las unidades asociadas a ese nodo presentan costos incrementales operacionales menores, lo que se manifiesta en su despacho a plena carga. El nodo 3, de consumo puro, es el que presenta el costo marginal mayor $\lambda_3 = 29,75 \ [UM\$/MWh]$. Este nodo es abastecido desde ambas líneas conectadas (nodo importador). Por su parte, el nodo 2 corresponde a un nodo exportador, puesto que la generación local supera los consumos locales (en este caso nulos). El nodo 1 presenta una característica mixta, en consideracion a que importa energía desde el nodo 2 y exporta hacia el nodo 3. La siguiente tabla 21.6 resume los resultados de este despacho.

ΓABLE 21.6. Resultado despacho económico multinodal sir	n límites de	$\operatorname{transmisión}$
Item	Valor	Unidad
Costos totales de operación	$6995,\!22$	$\rm UM\$/h$
Generación total de potencia activa	$433,\!00$	MW
Potencia no servida	0	MW
Pérdidas óhmicas	$3,\!00$	MW
Demanda total	430,00	MW
Ventas a costo marginal (V)	$12745,\!45$	$\rm UM\$/h$
Ingreso total de generadores a costo marginal (IG)	$12657,\!31$	$\rm UM\$/h$
Ingreso Marginal $(IM = V - IG)$	$88,\!13$	$\rm UM\$/h$

El ingreso tarifario corresponde a la diferencia de ingresos que se produce en un sistema al tarificar retiros e inyecciones de potencia a costo marginal. Este concepto será discutido conceptualmente en el capítulo siguiente.

Por último, se aprecia que la línea Lin2-3 excede su límite máximo de 130 MW, lo que hace necesario realizar el despacho económico multinodal considerando límites de transmisión.

En la figura 21.16 se muestran los resultados obtenidos con la herramienta de simulación, asociados al despacho hecho considerando los límites de transmisión.



FIGURE 21.16. Despacho económico multinodal con pérdidas óhmicas, sin límites de transmisión

Se aprecia el efecto relevante que tiene la consideración de límites de transmisión en el despacho del sistema. La siguiente tabla 21.7 resume los resultados de este despacho.

Mientras el despacho de las unidades Gen1A y Gen2A se mantiene en sus niveles máximos, los generadores Gen1B y Gen2B ven alterada su generación en forma importante, aumentando la dlxxxviii 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

límites de	$\operatorname{transmisión}$
Valor	Unidad
$7241,\!07$	$\rm UM\$/h$
$432,\!33$	MW
0	MW
$2,\!33$	MW
430,00	MW
$16561,\!24$	$\rm UM\$/h$
$13039,\!38$	$\rm UM\$/h$
$3521,\!86$	$\rm UM\$/h$
	límites de Valor 7241,07 432,33 0 2,33 430,00 16561,24 13039,38 3521,86

de la primera y disminuyendo la de la segunda. Como es de esperar, al agregar la restricción de transmisión, aumentan los costos de operación del sistema de 6995,22 UM\$/h a 7241,07 UM\$/h. Lo anterior contrasta con la disminución de pérdidas óhmicas en el sistema de 3,0 MW a 2,33 MW. En este caso, las grandes diferencias en los costos marginales por barra no pueden ser explicadas sólo por el efecto de las pérdidas óhmicas. La presencia de congestión en la línea Lin2-3 provoca que un aumento de demanda en el nodo 3 requiera no sólo de un aumento de la generación en el nodo 1 sino que además una disminución de generación de la unidad más económica Gen2B. Lo anterior es consecuencia del desfase máximo entre los ángulos de las tensiones entre los nodos 2 y 3 impuesto por la congestión. Esta diferenciación en los costos marginales deja en evidencia las zonas de suministro costoso, zonas de bajos costos de generación, así como la presencia de congestiones. Por último, es interesante notar el aumento importante en el ingreso tarifario del sistema.

Los resultados asociados a este despacho pueden ser reproducidos, utilizando la herramienta de despacho generalizado de DeepEdit y cargando el caso "Despacho multinodal" con precisiones de 0,001 tanto para la satisfacción de las restricciones como para la convergencia de los costos; y considerando límites de transmisión.

Asimismo, utilizando DeepEdit es posible estudiar distintos casos ejemplo de la literatura y de sistemas reales (Sistema Interconectado Central Chileno (SIC), Sistema Interconectado del Norte Grande Chileno (SING), Sistema ejemplo utilizado en libro Wood y Wollenberg, Caso de despacho Paper Pérez-Arriaga. DeepEdit utiliza como método de resolución Newton-Raphson.

21.4.10 Costos marginales negativos

Existen situaciones particulares de despacho que presentan costos marginales negativos en algunas barras del sistema. En términos económicos, un costo marginal negativo en una barra significa para el sistema un ahorro al "pagar" por aumentos de consumo de potencia en dicha barra. En otras palabras, al aumentar el consumo en la barra con costo marginal negativo, el costo total de operación disminuiría en vez de aumentar!

Para visualizar esta situación en el sistema ejemplo, se supone la incorporación de un generador Gen3 en la barra 3 del sistema. Este generador posee una potencia máxima de 300 MW y un costo variable de generación, lineal, de 5 UM\$/MWh. Además, se supondrá que la línea Lin1-2 tiene una capacidad 60 MW. En la figura 21.17 se resumen los resultados del despacho.

La barra 2 presenta un costo marginal de -0,97 UM\$/MWh, mientras que el de las barras restantes corresponde al costo incremental operacional de las unidades marginales de cada barra. Esta situación puede explicarse a partir del efecto que provoca la congestión en el sistema. La línea Lin1-2 alcanza su nivel máximo de transferencia de 60 MW, desde el nudo 2 al 1, lo que dermina una diferencia angular máxima entre el nodo 2 y 1 dada por $(\theta_2 - \theta_1) = x_{12} \times \overline{P}_{21}/S_{base} =$ $0,0826 \times 60/100$. Esta diferencia angular máxima también debe ser respetada por el camino paralelo a través de la barra 3. El sistema busca maximizar la inyección económica de potencia en la barra 3. Sin embargo, debido al amarre de ángulos, la inyección de Gen3 alcanza un límite máximo de 228,7 MW. De hecho, en la barra 2 la generación ha sido reducida al mínimo posible (Parque



FIGURE 21.17. Situación con costos marginales negativos

eólico no despachado! y Gen2B en su potencia mínima).

Con este antecedente, cabe preguntarse lo que sucedería producto de un aumento marginal $(1 \ MW)$ del consumo en la barra 2. Sin considerar el efecto de las pérdidas óhmicas, el flujo por *Lin2-3* disminuiría en 1 MW, lo que liberaría el ángulo de fase ($\Delta \theta = x_{23} \times 1/100$). Esto puede ser aprovechado para un aumento de la inyección de Gen3 (cercana 2 *MW*), la que se manifestaría en un aumento en el flujo de *Lin1-2* y una disminución de la generación costosa en la barra 1 (*Gen2B* disminuye su generación en un valor cercano a 1 *MW*). Desde el punto de vista del sistema, sin considerar el efecto de las pérdidas óhmicas, el balance es aproximadamente $\Delta F.O. \approx -2 \times 5 + 1 \times 11,76 \approx 1,76$. Lo anterior muestra, que a pesar de haber aumentado la demanda, el balance para el sistema es positivo. El efecto de las pérdidas óhmicas reduce la valorización de este efecto positivo a 0,97 *UM*\$/*MWh*, obtenido como costo marginal de la barra 3.

Los resultados asociados a este caso pueden ser reproducidos, utilizando la herramienta de despacho generalizado de DeepEdit y cargando el ejemplo "Despacho Costo Marginal Negativo" con precisiones de 0,001 tanto para la satisfacción de las restricciones como para la convergencia de los costos.

21.4.11 Modelo de transporte

Cabe mencionar que para estudios en el ámbito de la planificación, es común la utilización de una versión simplificada del despacho multinodal, denominado modelo de transporte. En este caso, si bien se establecen los balances nodales, no se introducen las relaciones que deben cumplir los ángulos de fase de las tensiones, por lo que el problema de optimización posee mayores grados de libertad. Las variables de ángulos de fase de las tensiones son reemplazadas por las variables de flujos medios en los elementos de transmisión. El problema de optimización tiene la forma general: dxc 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

$$F.O. = Min \left\{ \sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{ND} C_{Ui}(P_{Ui}) \right\}$$

$$s.a. \qquad (21.44)$$

$$\sum_{j \in \Omega_i^G} P_{Gj} - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left(P_{ij} + \frac{P_{Lij}}{2} \right) + \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{U_j} = \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{C_j} \, \forall i \in NN$$

$$P_{ij} \leq x_{ij} \overline{P}_{ij} \, \forall (i,j) \in \Omega^{NN}$$

$$-P_{ij} \leq x_{ij} \overline{P}_{ji}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_E \leq \mathbf{x}_E \leq \overline{\mathbf{x}}_E$$

Para el caso presentado en la sección anterior, la diferencia entre ambos modelos sería importante. En el modelo de transporte, el hecho de que la línea Lin2-3 esté congestionada, en analogía a lo que sucede con las carreteras, no sería un impedimento para que la central Gen2B pudiera despachar a plena carga, es decir 200 MW. De esta forma, el gradiente de costos marginales resulta mucho menos notorio y los costos totales de abastecimiento disminuyen, siendo explicable su diferencia exclusivamente por efecto de las pérdidas óhmicas.

La figura 21.18 muestra el resultado del despacho multinodal utilizando el modelo de transporte.



FIGURE 21.18. Despacho económico multinodal con modelo de transporte

21.5 Flujo de potencia óptimo

A través de las secciones precedentes, se ha ido incrementando paulatinamente el nivel de detalle en la modelación física de un SEP, con el fin de que se refleje en los modelos de despacho económico. De esta forma ha sido posible representar el sistema en términos multinodales, reflejando las relaciones eléctricas entre los nodos del sistema, las pérdidas óhmicas y los límites del sistema de transmisión. Sin embargo, hasta el momento no se ha incluido una modelación completa del flujo de potencia en corriente alterna, en particular, el efecto de la potencia reactiva y del módulo de las tensiones en las barras del sistema.

La idea del Flujo Óptimo de Potencia (OPF) fue introducida a comienzos de los años sesenta por Carpentier, como una extensión del despacho económico convencional, aunque en la actualidad el término es usado como nombre genérico para un conjunto de problemas de optimización de redes de potencia. Los métodos de resolución del OPF se pueden agrupar esencialmente en dos conjuntos:

El primer grupo consiste en los métodos que discriminan entre variables de control (por ejemplo, potencias generadas y módulos de tensiones en barras de generación) y variables de estado (por ejemplo, ángulos y módulos de tensiones en barras de consumo), donde sólo las variables de control forman el conjunto de variables de optimización, y las variables de estado se determinan mediante un flujo de potencia convencional que utiliza las variables de control obtenidas en el OPF.

En el segundo grupo se realiza una optimización sobre todas las variables del sistema simultáneamente. El vector de optimización posee la estructura general $\mathbf{x}_E = [\mathbf{p}_G, \mathbf{q}_G, \mathbf{p}_U, \mathbf{q}_U, \mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}]^T$. Este vector contiene en forma íntegra las variables del modelo de despacho basado en el flujo de potencia lineal, a las que se agregan:

- \mathbf{q}_G : potencias reactivas de las unidades de generación.
- \mathbf{q}_U : potencias reactivas no servidas.
- V: módulos de tensiones en las barras del sistema.
- t : Cambiador de derivación bajo carga en un transformador de poder, de acuerdo con el modelo presentado en la sección ??.

Este vector puede incluir otras variables de control y de estado del sistema, como por ejemplo, elementos de compensación serie/derivación, potencia reactiva entregada por equipos CER o la modelación de un UPFC.

21.5.1 Problema de optimización

El problema de despacho asociado se puede expresar a través del siguiente problema de optimización:

F.O. =
$$Min\left\{\sum_{i=1}^{NG} C_{Gi}(P_{Gi}) + \sum_{i=1}^{ND} C_{Ui}(P_{Ui})\right\} = Min\left\{\alpha_E + \mathbf{c}_E^T \mathbf{x}_E + \frac{1}{2}\mathbf{x}_E^T \mathbf{Q}_E \mathbf{x}_E\right\}$$
 (21.45)

s.a.

$$\sum_{j \in \Omega_i^G} P_{G_j} - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left[V_i V_j y_{ij} \cos\left(\theta_i - \theta_j - \gamma_{ij}\right) \right] + \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{U_j} = \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{C_j} \ \forall i \in NN$$
$$\sum_{j \in \Omega_i^G} Q_{G_j} - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left[V_i V_j y_{ij} \ sen\left(\theta_i - \theta_j - \gamma_{ij}\right) \right] + \sum_{j \in \Omega_i^C} Q_{U_j} = \sum_{j \in \Omega_i^C} Q_{C_j}$$
(21.46)

$$P_{U_i} - Q_{U_i} \frac{P_{C_i}}{Q_{C_i}} = 0 \ \forall i \in \Omega^C$$

$$(21.47)$$

$$V_{i}^{2} y_{ij} \cos\left(\gamma_{ij}\right) - V_{i} V_{j} y_{ij} \cos\left(\theta_{i} - \theta_{j} - \gamma_{ij}\right) \leq \overline{P}_{ij} \,\,\forall (i,j) \in \Omega^{NN}$$

$$V_{i}^{2} y_{ji} \cos\left(\gamma_{ji}\right) - V_{j} V_{i} y_{ji} \cos\left(\theta_{j} - \theta_{i} - \gamma_{ji}\right) \leq \overline{P}_{ji}$$

$$\mathbf{x}_{E} \leq \mathbf{x}_{E} \leq \overline{\mathbf{x}_{E}}$$

$$(21.48)$$

Donde F.O. (ecuación 21.45), al igual que en el caso del despacho económico en 21.41 es una función cuadrática que representa los costos totales de operación del sistema (generación y costo de falla). Sin embargo, para los problemas de tipo OPF se ha considerado adicionalmente una gama diversa de funciones objetivo:

dxcii 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

- Minimización de las pérdidas de potencia activa,
- Minimización del número de cambios sobre el control programado,
- Minimización de emisiones contaminantes,
- Maximización de transferencias entre zonas del sistema.

El primer grupo de $2 \times NN$ restricciones no lineales de igualdad (21.46), representa los balances de potencia activa y reactiva en cada nodo. Estas restricciones corresponden a las ecuaciones generales de flujos de potencia (ver sección ??), donde los elementos de la matriz de admitancia nodal son expresados en coordenadas polares como $\overline{Y}_{ij} = y_{ij} \angle \gamma_{ij}$.

El segundo grupo de restricciones (21.47) establece que en la eventualidad de no abastecer consumos, el factor de potencia del consumo residual debe ser el mismo del consumo total (P_{C_i}, Q_{C_i}) .

Las $2 \times NL$ restricciones lineales de desigualdad (21.48) representan los límites de transmisión, en este caso expresados como límites de potencia activa. Existen modelos de OPF que incorporan modelos alternativos para expresar este límite, siendo común el uso del cuadrado el módulo de la corriente de línea. Por último, cada una de las variables de optimización tiene asociadas una cota inferior y superior.

El problema de optimización resultante tiene función objetivo cuadrática, restricciones no lineales (funciones senoidales) y lineales de igualdad; y restricciones no lineales de desigualdad. Asimismo, el modelo puede incluir variables de tipo entero para poder representar acciones de control de tipo discreto como es el caso de los tradicionales equipos de compensación o cambiadores de derivación en transformadores de poder.

Para resolver este tipo de problemas se han desarrollado distintas técnicas, entre las que destacan:

- Solución iterativa de problemas lineales,
- Solución iterativa de problemas cuadráticos,
- Metodologías de punto interior,
- Metodologías de penalización lagrangeana,
- Algoritmos genéticos.

Generalmente, este tipo de técnicas se apoyan en paquetes de optimización comerciales como CPLEX, Minos, Xpres.

21.5.2 Criterio de convergencia

El proceso de convergencia de los métodos de optimización del OPF se controla a través de distintos criterios:

- Número máximo de iteraciones: se establece un límite al número de iteraciones permitidas al algoritmo de optimización, el que se relaciona con el tiempo computacional tolerable o la constatación de que el algoritmo no logra la convergencia.
- Satisfacción de restricciones: Una forma de llevar a la práctica este criterio es considerar el error cuadrático medio de los residuos de las restricciones de igualdad en los balances de potencia activa IP_i^k y reactiva IQ_i^k en cada iteración k. El error debe ser menor, en un cierto porcentaje $\varepsilon_{restric.}$ definido por el usuario, a la demanda total de potencia aparente. Este

criterio se expresa como:

$$\begin{split} IP_i^k &= \sum_{j \in \Omega_i^G} P_{G_j}^k - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left[V_i^k V_j^k y_{ij} \cos\left(\theta_i^k - \theta_j^k - \gamma_{ij}\right) \right] + \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{U_j} - \sum_{j \in \Omega_i^C} P_{C_j} \ \forall i \in NN \\ IQ_i^k &= \sum_{j \in \Omega_i^G} Q_{G_j}^k - \sum_{j \in \Omega_i^N} \left[V_i^k V_j^k y_{ij} \ sen\left(\theta_i^k - \theta_j^k - \gamma_{ij}\right) \right] + \sum_{j \in \Omega_i^C} Q_{U_j}^k - \sum_{j \in \Omega_i^C} Q_{C_j} \ (21.49) \\ \sqrt{\sum_i \left(IP_i^k\right)^2 + \left(IQ_i^k\right)^2} \le \frac{\varepsilon_{restric.}}{100} \sqrt{DTP^2 + DTQ^2} \\ DTP &= \sum_{j \in \Omega^C} P_{C_j} \ ; \ DTQ = \sum_{j \in \Omega^C} Q_{C_j} \end{split}$$

• Convergencia de la función objetivo: Este criterio de convergencia de costos puede corresponder a que el valor absoluto de la diferencia de costo entre una iteración y la anterior sea menor que un porcentaje ε_{costo} , definido por el usuario, del costo medio entre estos costos. Es decir, que el costo se estabilice entre iteraciones. Lo anterior se expresa de la siguiente forma.

$$\left|F.O.^{k+1} - F.O.^{k}\right| \le \frac{\varepsilon_{costo}}{100} \frac{\left(F.O.^{k+1} + F.O.^{k}\right)}{2}$$
 (21.50)

21.5.3 Ejemplo de aplicación

En la figura 21.19 y tabla 21.8 se resumen los resultados alcanzados con el modelo de OPF presentado en la sección anterior, utilizando la herramienta de flujo de potencia óptimo de DeepEdit y cargando el caso "Despacho multinodal", considerando límites de transmisión, con precisiones de 0,001 tanto para la satisfacción de las restricciones como para la convergencia de los costos.



FIGURE 21.19. Despacho multinodal con flujo de potencia óptimo

dxciv 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

TABLE 21.8. Resultado despacho de flujo de pot	encia óptin	no
Item	Valor	Unidad
Costos totales de operación	7269, 91	UM\$/h
Generación total	$432,\!63$	MW
	168, 36	MVAr
Potencia no servida	0	MW
Pérdidas óhmicas	$2,\!63$	MW
Demanda total	430,00	MW
	190	MVAr
Ventas a costo marginal (V)		UM/h
Ingreso total de generadores a costo marginal (IG)		UM\$/h
Ingreso Marginal $(IM = V - IG)$		UM\$/h

Se observa que los resultados alcanzados son similares a los del despacho económico basado en el flujo de potencia lineal (figura 21.16). Las diferencias se explican por el efecto que tiene en el sistema, un modelamiento del estado estacionario del sistema más cercano al fenómeno físico observado en la realidad. Esto lleva a que se produzca una traspaso cercano a 1,5 MW en los dos generadores marginales (Gen1B(175,08 a 176,91 MW), Gen2B(165,25 a 163,73 MW)).

Los elementos novedosos en el análisis de los resultados de un OPF corresponden a la información que hasta el momento había sido considerada como fija: módulos de tensiones y potencias reactivas. Se aprecia que el módulo de la tensión en el nodo 2 es elevada a su valor máximo $(1,05 \ pu)$, llegando a un valor mínimo de 101,46 pu en el nodo 3. Las inyecciones de potencia reactiva se reparten en las distintas barras 1 y 2 del sistema, no constatándose saturaciones.

En forma análoga al análisis realizado para las potencias activas, las ecuaciones de balance nodal de potencia reactiva, tienen asociados multiplicadores de Lagrange, que dan lugar a los costos marginales de potencia reactiva por barra τ_i . Los multiplicadores de Lagrange τ_i definen, para el sistema, el costo de suministrar una unidad adicional de potencia reactiva (MVAr) en el nodo correspondiente. Salvo en condiciones críticas de abastecimiento, estos costos son uno o dos órdenes de magnitud menores a los costos marginales de potencia activa. En este caso, se aprecia que en la barra 3, $\tau_i = 0,24 UM / MVArh$. Lo anterior sugiere que la presencia de un equipo de compensación capacitiva en la barra 3 podría disminuir el costo de abastecimiento.

Este tipo de sensibilidades puede ser realizada utilizando la herramienta de simulación DeepEdit.

21.6 Modelo de coordinación hidrotérmica

El despacho hidrotérmico se plantea como un problema de despacho eléctrico térmico al que se le incorpora un modelo del sistema hidráulico asociado y una función de costo representativa del costo de oportunidad del agua almacenada en los embalses. En estas condiciones, el vector de variables aleatorias de caudales afluentes adopta una realización concreta, con valores predeterminados, y el acoplamiento temporal entre variables de la operación de etapas consecutivas es reducido a los volúmenes de agua almacenada en cada embalse del sistema. Para la optimización en un contexto estocástico, donde la incertidumbre modelada corresponde a las hidrologías, se han desarrollado distintas técnicas, entre las que destaca la programación estocástica pura, programación dinámica estocástica y la programación dinámica dual estocástica.

En esta sección se expone el planteamiento básico de esta optimización, presentando primero en términos conceptuales el problema de coordinación hidrotérmica en el mediano y largo plazo; para luego detallar las dificultades del despacho hidrotérmico de corto plazo.

21.6.1 La coordinación hidrotérmica

La característica más llamativa de un sistema con generación hidroeléctrica es poder utilizar la energía "gratuita" de los caudales afluentes y la que está almacenada en los embalses, evitando así incurrir en gastos de combustible en las unidades termoeléctricas. Sin embargo, la disponibilidad de energía hidroeléctrica está limitada por la capacidad de almacenamiento en los embalses. Esto introduce una dependencia entre la decisión operativa inmediata (despacho) y los costos operativos que se tendrán en el futuro. En otras palabras, si las reservas de energía hidroeléctrica son usadas inmediatamente, con el objetivo de minimizar los costos de generación de centrales térmicas, y ocurre una sequía severa en el futuro, se podría producir un racionamiento de costo elevado; dicho de otro modo, una crisis energética del sistema. Por otro lado, si se protegen las reservas de energía hidroeléctrica a través de un uso más intenso de generación térmica, y las afluencias hidráulicas futuras son altas (lluvia, deshielos), puede ocurrir un vertimiento en los embalses del sistema, lo que representa un desperdicio de energía y consecuentemente, un aumento en el costo operativo. Esta situación se representa esquemáticamente en la figura 21.20.



FIGURE 21.20. El problema de la coordinación hidrotérmica

Por lo tanto, a diferencia de los sistemas puramente térmicos, cuya operación es desacoplada en el tiempo, la operación de un sistema hidrotérmico con embalses es un problema acoplado en el tiempo, es decir, una decisión operativa hoy afecta el costo operativo mañana. El operador de un sistema hidrotérmico debe equilibrar, por tanto, el beneficio obtenido por el uso inmediato del agua de los embalses con el beneficio futuro que resultará del almacenamiento de la misma. Esta disyuntiva se grafica en la figura 21.21.



FIGURE 21.21. Costos inmediato y futuro en función del nivel de almacenamiento de los embalses del sistema

dxcvi 21. Modelos de despacho en mercados eléctricos

La función de costo inmediato (FCI) expresa los costos de generación térmica en un periodo de tiempo determinado, que se denominará etapa t. Se observa que el costo inmediato aumenta en la medida que disminuye la energía hidráulica disponible en la etapa, esto es, en la medida que aumenta el volumen almacenado final.

La función de costo futuro (FCF) está asociada a los costos que deberá cubrir el sistema debido, ya sea a la generación térmica, y/o al desabastecimiento, desde el final de la etapa t (inicio de t+1) hasta el infinito. El costo futuro disminuye en la medida que aumenta el volumen almacenado final, pues habrá más energía hidráulica disponible en el futuro. Producto de que existen muchos parámetros del sistema que son inciertos en el futuro, la función de costo futuro tendrá un carácter estocástico, siendo el más relevante en este tipo de estudios la incertidumbre hidrológica. En tal sentido, el operador del sistema debe definir un criterio para enfrentar el problema estocástico, que típicamente es la consideración de costos futuros esperados. Por ello, en presencia de incertidumbre, la FCF se transforma en una función de costos futuros esperados (FCFE). Otros criterios para la función objetivo estocástica, desde un punto de vista de un agente central, son la minimización de los costos de operación y del riesgo de déficit energético, el abastecimiento de la demanda con un cierto nivel de confianza, etc.

La decisión óptima de operación estará dada por la minimización de los costos inmediatos y los costos futuros esperados (ver figura 21.22).



FIGURE 21.22. Uso económico del agua embalsada

En resumen, a diferencia de los sistemas puramente térmicos, que tienen un costo operativo directo, las centrales hidráulicas tienen un valor indirecto (costo de oportunidad o valor estratégico del agua embalsada), asociado a la economía de combustible de las térmicas desplazadas en el presente o en el futuro. El uso óptimo del agua se obtiene cuando están equilibrados los valores inmediato y futuro del agua.

21.6.2 Despacho hidrotérmico de corto plazo

Si el problema hidráulico pudiera ser representado convenientemente a través de las capacidades máximas disponibles en las unidades de generación, no habría necesidad de integrarlo explícitamente al análisis del despacho. De esta forma, ambos casos podrían ser resueltos en forma separada. Una posible función objetivo del problema hidráulico aislado podría ser la maximización de la capacidad de generación eléctrica en las centrales hidráulicas del sistema. Sin embargo, las unidades de generación hidráulica, junto con estar acopladas al sistema eléctrico de transmisión, suelen estar conectadas a través de complejas cuencas hidrográficas. Así, la decisión de distribuir los caudales por la cuenca de modo de producir la mayor cantidad de energía, no necesariamente corresponde a la mejor solución económica, ya que esta energía no tiene, forzosamente, igual valor en todos los nodos de la red y dichos valores varían según sean las condiciones del sistema.

El subproblema hidráulico incorpora nuevas variables y restricciones al modelo de despacho

presentado en la sección 21.4. Cabe destacar la diferencia entre central y unidad hidráulica. Se entiende, en el contexto de esta modelación, que en una cuenca sólo existen unidades hidráulicas en serie o de embalse, y que la denominación de central es aplicable únicamente cuando éstas poseen un generador que convierte la energía del caudal que circula por una turbina en energía eléctrica.

21.6.3 Variables

Las variables que introduce el subproblema hidráulico son un conjunto de tipos de caudales controlados directa o indirectamente por los diversos tipos de unidades hidráulicas presentes en las cuencas modeladas. Estos caudales son: turbinados $q_{T,}$, vertidos q_V , filtrados q_F , remanentes $q_{R,}$, de falla hidráulica q_A y los volúmenes de agua almacenada en los embalses del sistema v^1 al final del periodo. Así, el vector de variables de origen hidráulico \mathbf{x}_H es:

$$\mathbf{x}_H = (\mathbf{q}_T, \mathbf{q}_V, \mathbf{q}_F, \mathbf{q}_R, \mathbf{q}_A, \mathbf{v}^1)^T = (\mathbf{q}, \mathbf{v}^1)^T$$
(21.51)

21.6.4 Costo futuro del aqua embalsada

El costo futuro del agua de los embalses es una función convexa que depende de los estados finales o volúmenes de agua acumulados al término del intervalo de tiempo que dura el despacho, pero que también dependería del perfil de afluencias que se prevé hacia el futuro. Para un problema de despacho específico, esta función es:

$$cf = \phi(\mathbf{v}^1, \mathbf{a}) \tag{21.52}$$