## 2. Conceptos matemáticos básicos para el estudio de sistemas trifásicos

2.1 Introducción

2.2 Sistemas de corriente alterna: términos y modelos

2.3 Sistemas equilibrados

2.4 Equivalentes monofásicos

2.5 Potencia en sistemas alternos

2.6 Magnitudes y cálculo en por unidad

## Herramientas básicas de análisis adquiridas en otros cursos

Cálculo con números complejos, representación fasorial, cálculo matricial, funciones de transferencia.

## Representación sinusoidal y fasorial de corrientes y voltajes

F tiene la propiedad de ser lineal y biyectiva.

**Dominio del tiempo**

$$v = \sqrt{2}V\,\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v' = \sqrt{2}V\,\sin(\omega(t + t_0) + \varphi)$$

**Espacio Complejo**

$$V e^{j\varphi}$$

$$V e^{j(\varphi + \omega t_0)}$$

$$\text{Dominio del tiempo} \xrightarrow{F\{\ \}} \text{Espacio Complejo}$$

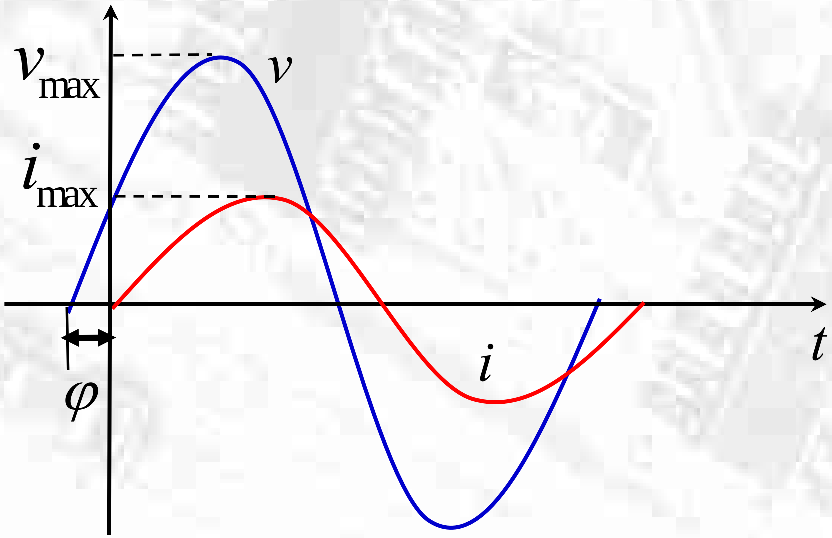
$$\text{Espacio Complejo} \xrightarrow{F^{-1}\{\ \}} \text{Dominio del tiempo}$$

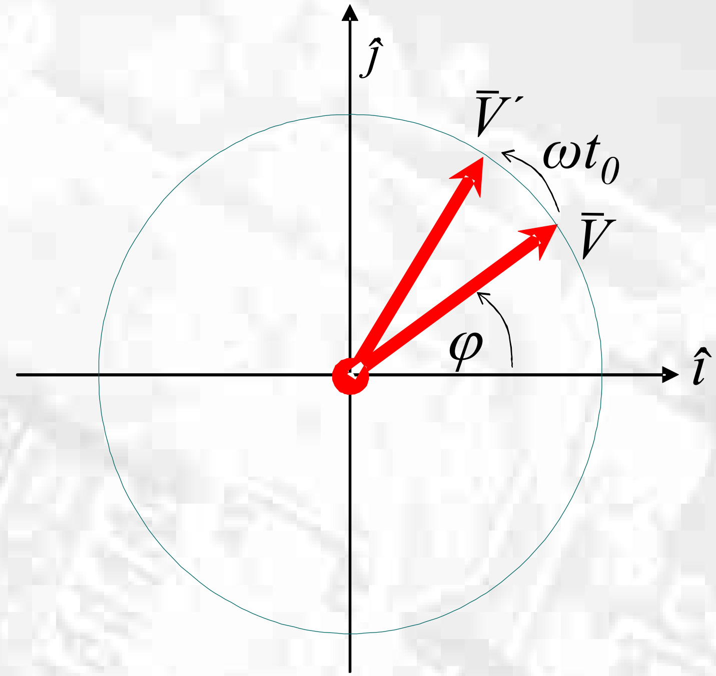
$$F\left\{\sqrt{2}Vsen\left(\omega t + \varphi\right)\right\} = Ve^{j\varphi}$$

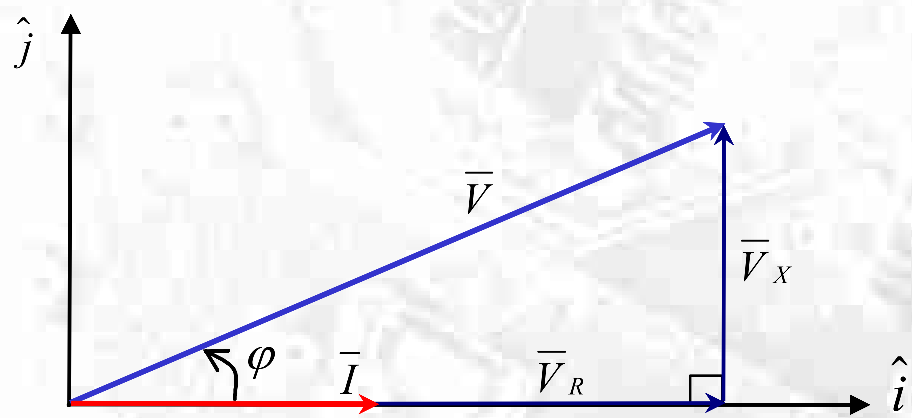
$$F^{-1}\left\{Ve^{j\varphi}\right\} = \sqrt{2}Vsen\left(\omega t + \varphi\right)$$

# Introducción (I)

## Representación sinusoidal y fasorial de corrientes y voltajes



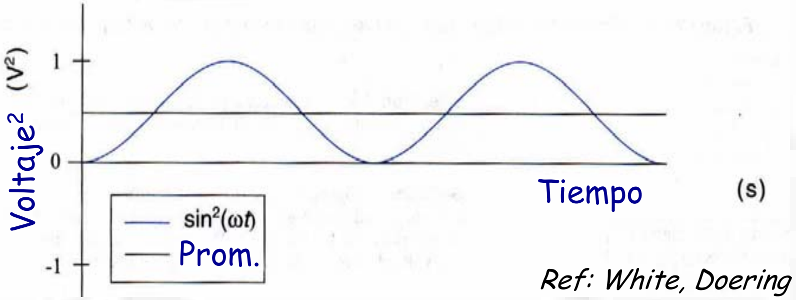
## Concepto de Valor Efectivo o RMS

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

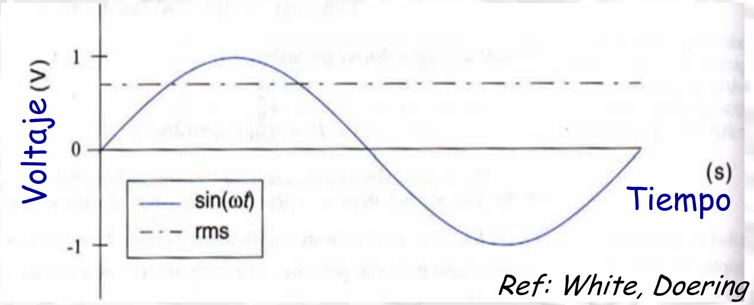
Valor efectivo (rms) en función de la potencia

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Relación entre valor efectivo (rms) y forma de onda original




Ref: White, Doering




Ref: White, Doering

## Representación fasorial a través de Valor Efectivo

$$\overline{V} = Ve^{j\varphi} = V[\cos\varphi + j\sin\varphi]$$

- La suma de dos funciones sinusoidales en el tiempo corresponde con la suma de vectores en el plano complejo.
- Derivadas y/o integrales de funciones del tiempo (capacidades, inductancias) se traducen en el plano complejo en giros de fasores. Ecuaciones diferenciales comunes se transforman en ecuaciones algebraicas.

**Diferenciación**

$$F\{i(t)\} = F\{I_{\max}\cos(\omega t + \varphi)\} = I_{\max}e^{j\varphi}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d\left(I_{\max}\cos(\omega t + \varphi)\right)}{dt}$$

$$= -\omega I_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega I_{\max}\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$F\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = F\left\{\omega I_{\max}\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})\right\}$$

$$= \omega I_{\max}e^{j\varphi + j\frac{\pi}{2}} = \omega F\{i(t)\}e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega F\{i(t)\}$$

-Diferenciación -> fasor gira $\pi/2$ en contra del sentido del reloj y es amplificado en un factor $\omega$

**Integración**

$$\int i(t)dt =$$

## Voltaje en bobina

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\overline{U} = j\omega L\overline{I} = jX_L\overline{I}$$

XL: reactancia inductiva

## Voltaje en capacidad

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$\overline{U} = \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = -jX_C\overline{I}$$

XC: reactancia capacitiva

## Representación general de una impedancia

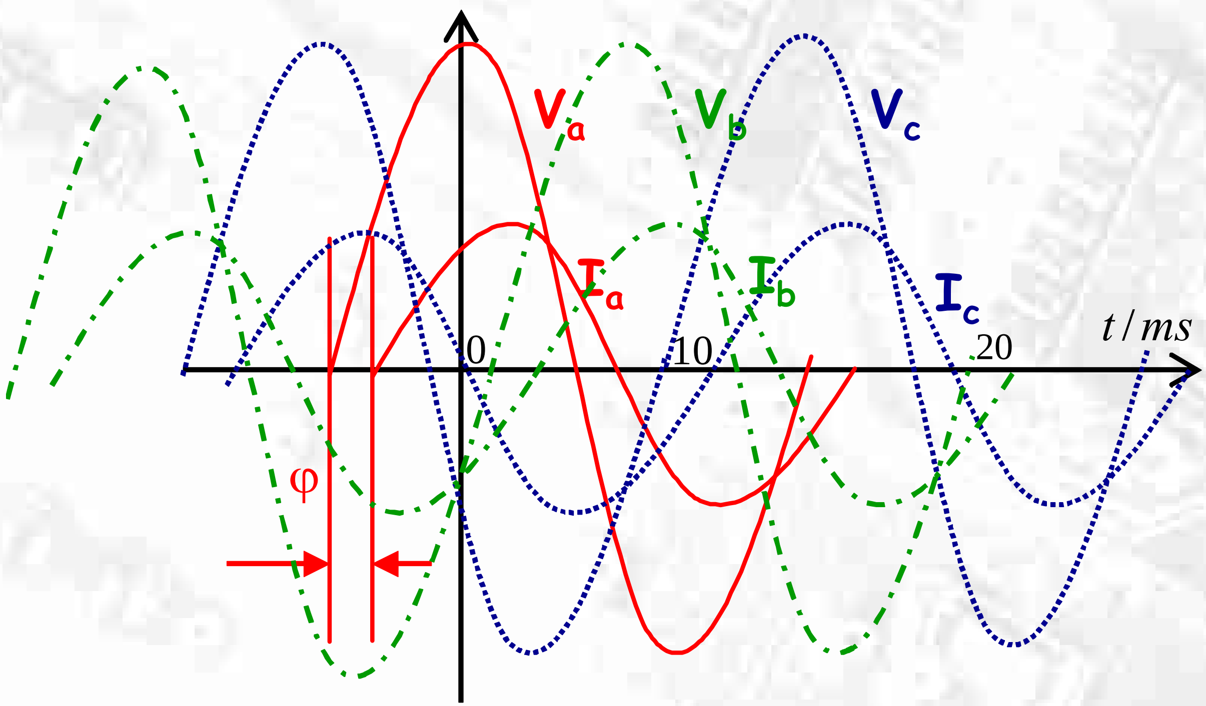
$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = Z(\cos\varphi_z + j\sin\varphi_z)$$

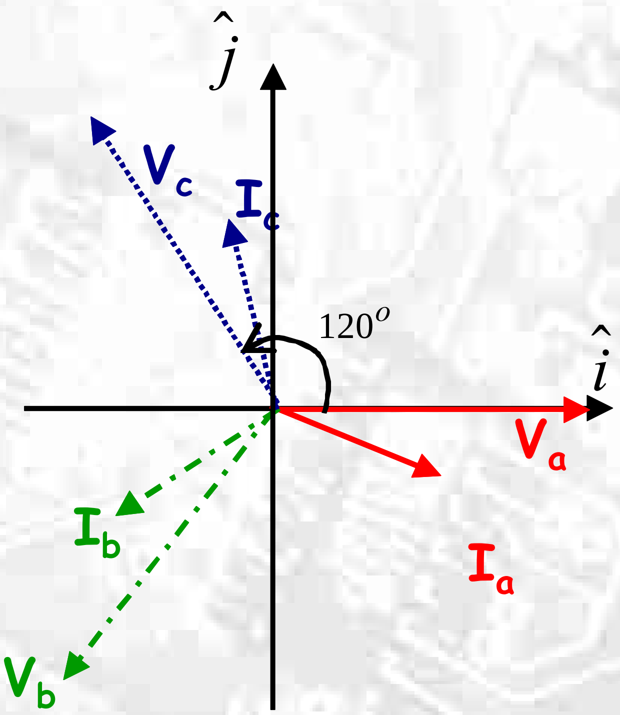
-Definiciones asociadas: R, $\overline{X}$, Y, G, B

## Representación de sistemas trifásicos

- 3 tensiones de igual magnitud desfasadas en 120º
- Carga simétrica --> tres corrientes de igual magnitud y desfasadas en 120 º

$$v_a(t) = V_{\max}\cos(\omega t) \qquad v_b(t) = V_{\max}\cos\left(\omega t - 120^o\right)$$



## Relaciones válidas en sistemas equilibrados

$$\overline{V}_a + \overline{V}_b + \overline{V}_c = 0$$

**- factor de giro**

$$\overline{a} = e^{j120^o} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{a}^2 = e^{j240^o} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 + \overline{a} + \overline{a}^2 = 0$$

**- relaciones adicionales**

$$1 - \overline{a}^2 = \sqrt{3}e^{j30^o} = -j\overline{a}\sqrt{3}$$

$$\overline{a} - 1 = \sqrt{3}e^{j150^o} = -j\overline{a}^2\sqrt{3}$$

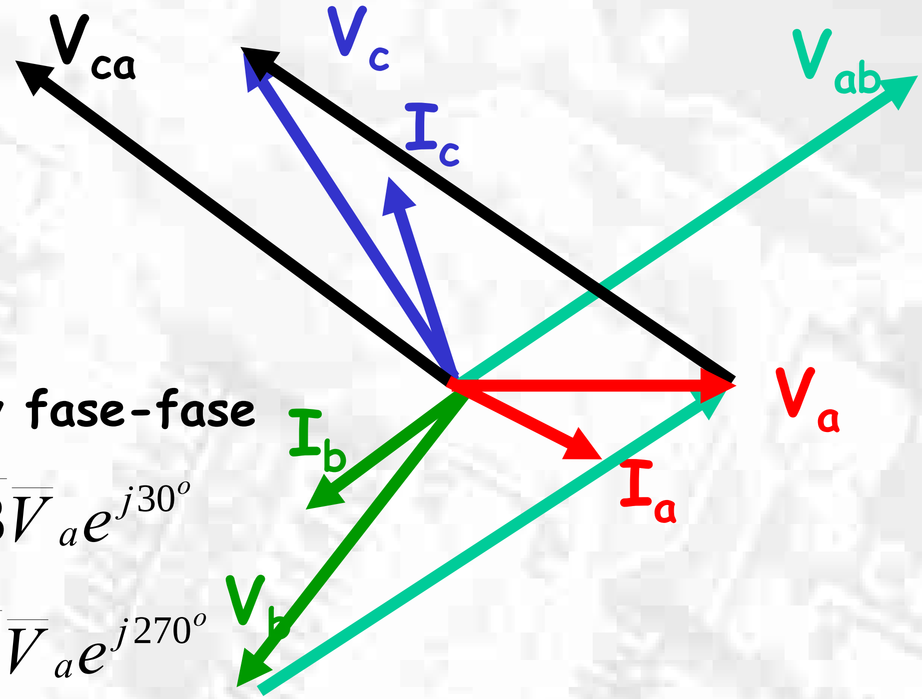
$$\overline{a}^2 - \overline{a} = \sqrt{3}e^{j270^o} = -j\sqrt{3}$$

- Representación matemática de voltajes fase-neutro

$$\overline{V}_a = \overline{V}_a$$

$$\overline{V}_b = \overline{a}^2 \overline{V}_a$$

$$\overline{V}_c = \overline{a}\overline{V}_a$$




- Relación entre voltajes fase-neutro y fase-fase

$$\overline{V}_{ab} = \overline{V}_a - \overline{V}_b = \overline{V}_a(1-\overline{a}^2) = \sqrt{3}\overline{V}_a e^{j30^o}$$

$$\overline{V}_{bc} = \overline{V}_b - \overline{V}_c = \overline{V}_a(\overline{a}^2 - \overline{a}) = \sqrt{3}\overline{V}_a e^{j270^o}$$

$$\overline{V}_{ca} = \overline{V}_c - \overline{V}_a = \overline{V}_a(\overline{a} - 1) = \sqrt{3}\overline{V}_a e^{j150^o}$$

Esta operación puede realizarse en forma análoga para las corrientes respectivas.

# Sistemas Equilibrados (I)

## Cargas simétricas en conexión estrella

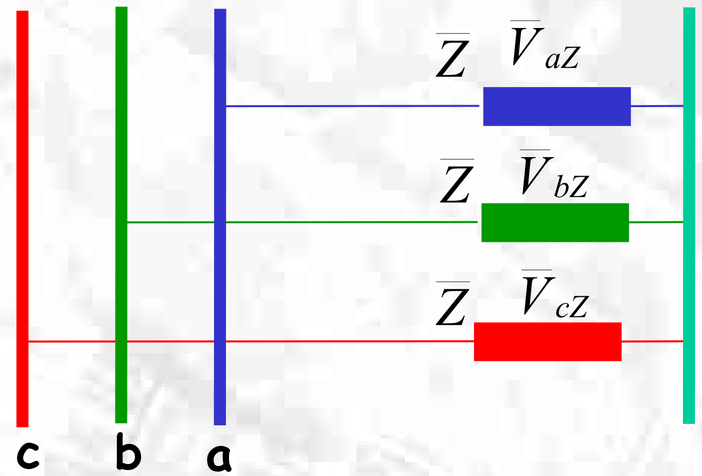
$$\overline{Z} = Ze^{j\varphi_z} = R + jX$$

**Corrientes resultantes**

$$\overline{I}_a = \frac{\overline{V}_{az}}{\overline{Z}}, \quad \overline{I}_b = \frac{\overline{V}_{bz}}{\overline{Z}}, \quad \overline{I}_c = \frac{\overline{V}_{cz}}{\overline{Z}}$$

$$\overline{I}_a = \overline{a}\,\overline{I}_b = \overline{a}^2\,\overline{I}_c$$

**Conexión estrella Y**




**Corriente por el neutro**

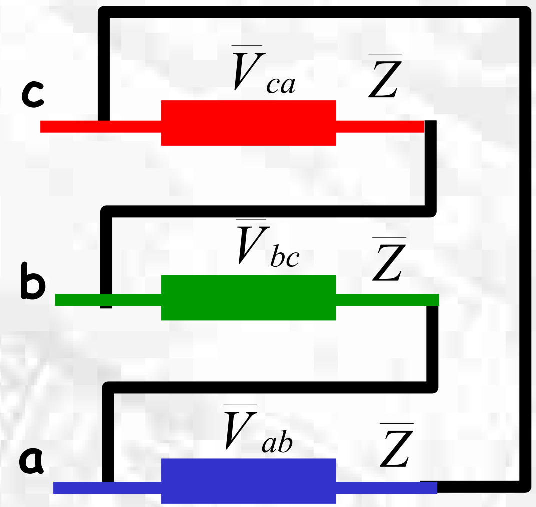
$$\overline{I}_N = \overline{I}_a + \overline{I}_b + \overline{I}_c = 0$$

**Razón por la cual es posible eliminar conductor neutro**

$$V_\Delta = \sqrt{3}V_Y \qquad I = I_Y$$

## Cargas simétricas en conexión delta

Conexión delta $\Delta$




$$\overline{Z} = Ze^{j\varphi_z} = R + jX$$

**Corrientes resultantes**

$$\overline{I}_{ab} = \frac{\overline{V}_{ab}}{\overline{Z}}, \quad \overline{I}_{bc} = \frac{\overline{V}_{bc}}{\overline{Z}}, \quad \overline{I}_{ca} = \frac{\overline{V}_{ca}}{\overline{Z}}$$

**Para el circuito en Delta se cumple**

$$\overline{I}_{ab} + \overline{I}_{bc} + \overline{I}_{ca} = \frac{1}{\overline{Z}}\left(\overline{V}_{ab} + \overline{V}_{bc} + \overline{V}_{ca}\right) = 0$$

$$\overline{I}_a = -\overline{I}_{ca} + \overline{I}_{ab}$$

$$\overline{I}_b = \overline{I}_{bc} - \overline{I}_{ab}$$

$$\overline{I}_c = \overline{I}_{ca} - \overline{I}_{bc}$$

$$\overline{I}_a + \overline{I}_b + \overline{I}_c = 0$$

$$V = V_\Delta \qquad I = \sqrt{3} I_\Delta$$

¿Qué sucede en un cambio de conexión de estrella a delta, para el caso de cargas iguales?

## Representación fasorial de consumos trifásicos

- Relación válida en general para consumos trifásicos

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_a \\ \overline{V}_b \\ \overline{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} & \overline{C} \\ \overline{C} & \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{C} & \overline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_a \\ \overline{I}_b \\ \overline{I}_c \end{bmatrix}$$

Red constituida por elementos pasivos !

Matriz cíclica !!

- Caso particular: conexión simétrica, sin considerar acoplamiento entre conductores

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_a \\ \overline{V}_b \\ \overline{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{A} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_a \\ \overline{I}_b \\ \overline{I}_c \end{bmatrix}$$

- Caso particular: conexión simétrica, considerando acoplamiento entre conductores

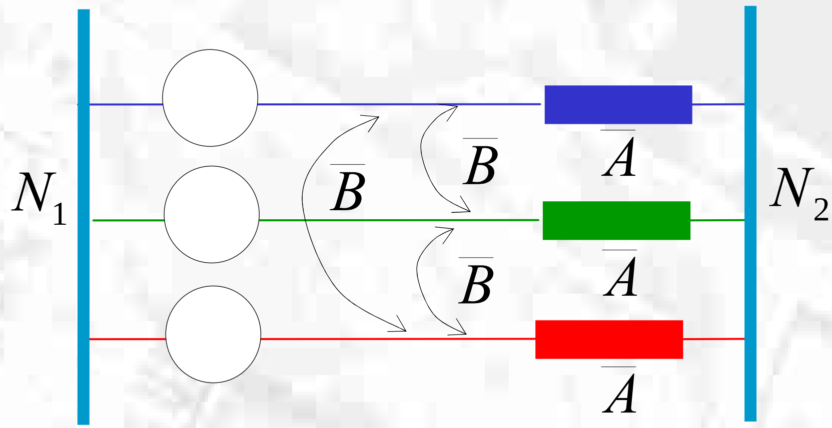
$$\begin{bmatrix} \overline{V}_a \\ \overline{V}_b \\ \overline{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_a \\ \overline{I}_b \\ \overline{I}_c \end{bmatrix}$$

- **Suficiencia de representación monofásica**

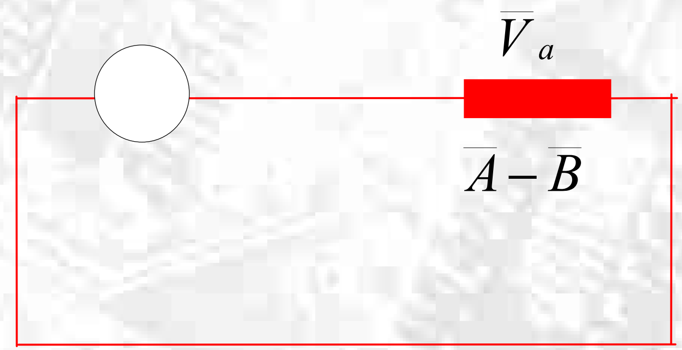
$$\bar{I}_N = 0; \longrightarrow \bar{I}_a = -(\bar{I}_b + \bar{I}_c)$$

$$\bar{V}_a = \bar{A}\bar{I}_a + \bar{B}(\bar{I}_b + \bar{I}_c)$$

$$\longrightarrow \frac{\bar{V}_a}{\bar{I}_a} = (\bar{A} - \bar{B})$$




**Análogamente para otros conductores**




$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_a \\ \bar{I}_b \\ \bar{I}_c \end{bmatrix}$$

**Matriz cíclica y simétrica**

$$N_1 = N_2 = N$$

## Potencia instantánea

$$v(t) = V_{max} sin(\omega t) \longrightarrow V\angle 0$$

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi) \longrightarrow I\angle -\varphi$$

$$sin\ x\ sin\ y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

**Propiedad trigonométrica**

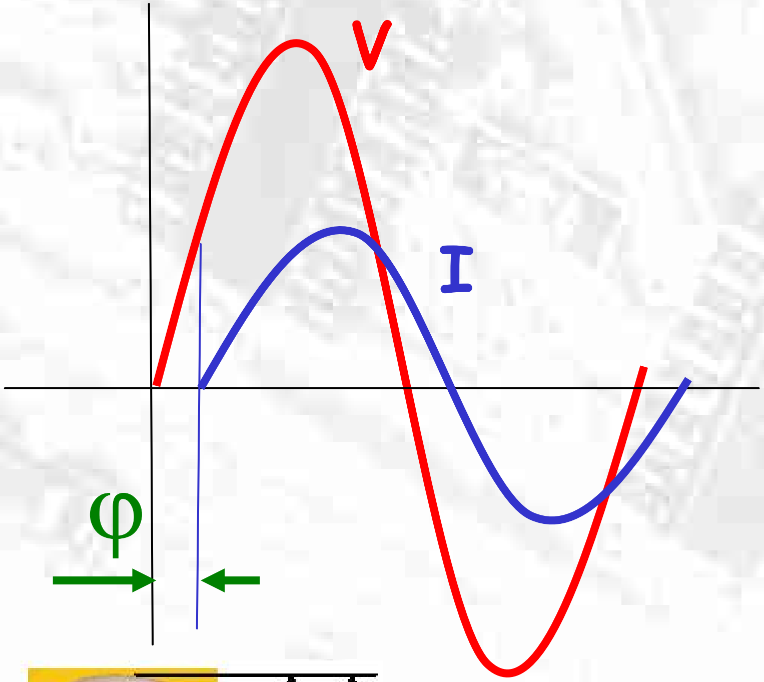
$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{\mathrm{V}_{\max} I_{\max}}{2}(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi))$$

$$= VI\cos(\varphi) - VI\cos(2\omega t - \varphi)$$

**Potencia aparente**

**Potencia instantánea transmitida: forma sinusoidal, doble de la frecuencia de la tensión aplicada, oscila en torno a valor promedio (potencia media, real o activa).**

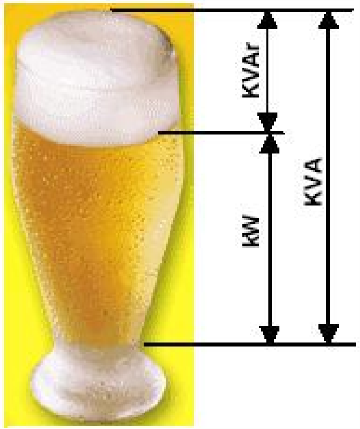
## Potencia instantánea en forma gráfica

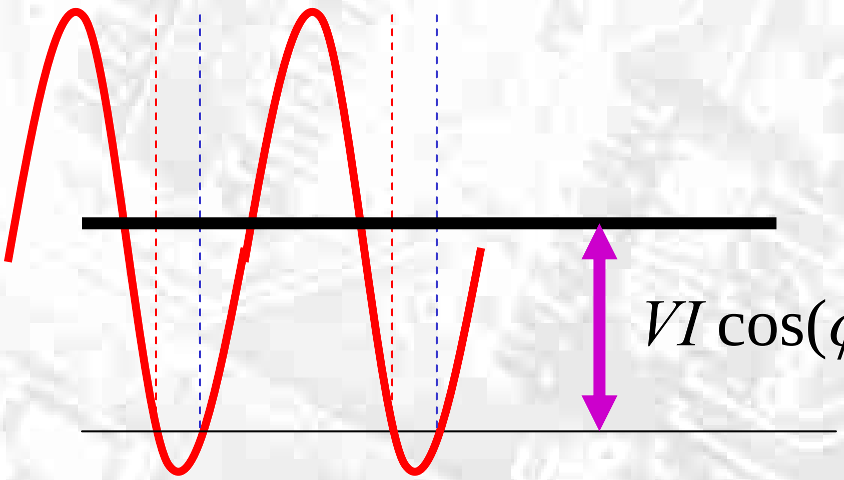



$$p(t) = VI\cos(\varphi) - VI\cos(2\omega t - \varphi)$$
$$= P(1 - \cos(2\omega t)) - Q\sin(2\omega t)$$

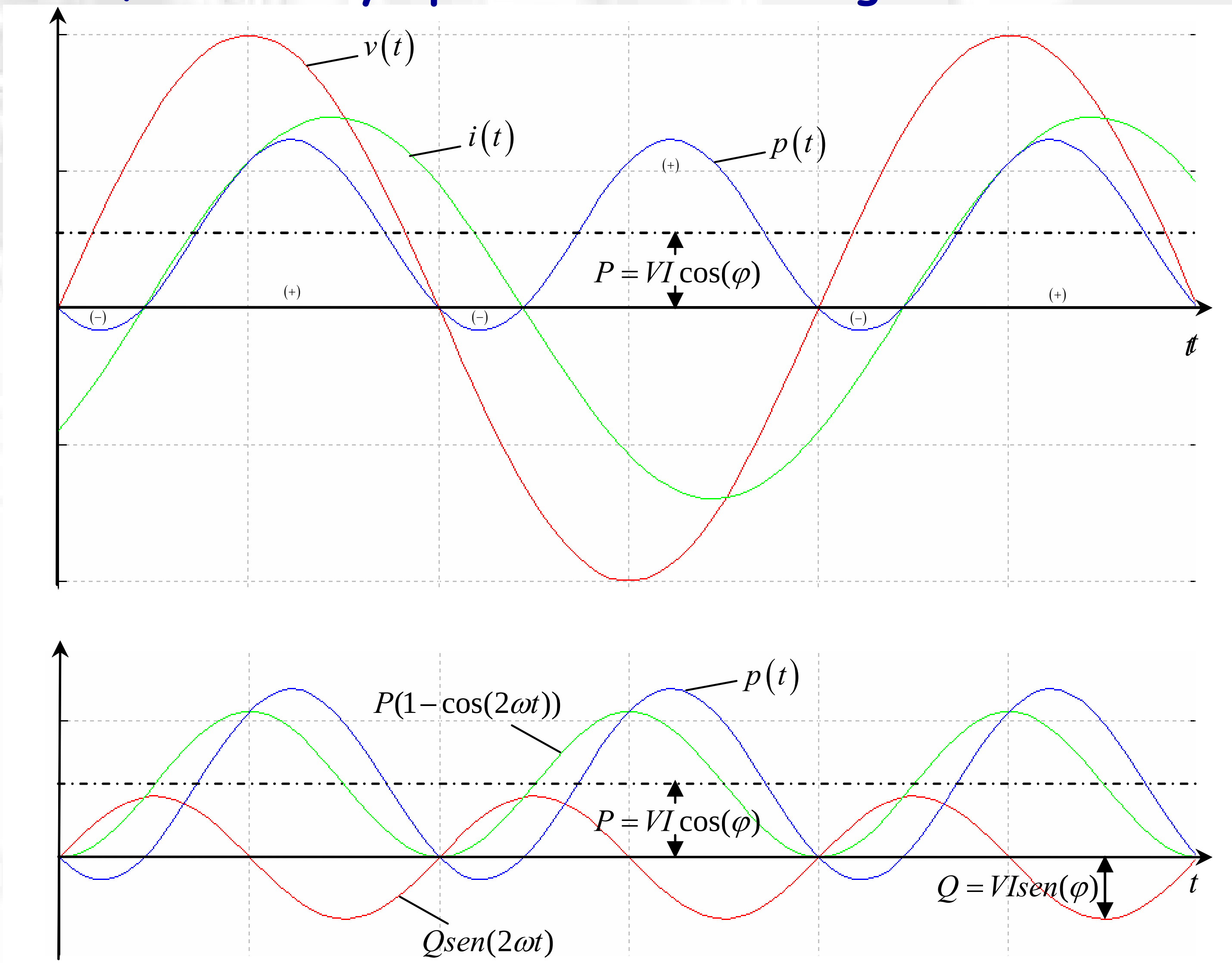
$P = VI\cos(\varphi)$ **Potencia activa (MW)**

$Q = VI\ \sin(\varphi)$ **Potencia reactiva (MVAr)**



# Potencia activa, reactiva y aparente en forma gráfica



## Potencia fasorial o potencia compleja $\overline{S}$

$$\overline{V} = V\angle 0^o \qquad \overline{S} = \overline{V}\,\overline{I}^* = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi$$

$$\overline{I} = I\angle -\varphi \qquad = P + jQ = \overline{Z}\,\overline{I}\,\overline{I}^* = \overline{Z}\left|\overline{I}\right|^2$$

## Circuito trifásico

$$p_{3\phi} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c$$
$$= 2VI\left[\sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi) + \sin\left(\omega t - 120^o\right)\sin\left(\omega t - 120^o - \varphi\right) + \sin\left(\omega t - 240^o\right)\sin\left(\omega t - 240^o - \varphi\right)\right]$$

$$p_{3\phi} = VI\left[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - 240^o - \varphi\right) + \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - 480^o - \varphi\right)\right]$$

$$p_{3\phi} = 3VI\cos\varphi = 3V_{f-n}I\cos\varphi = \sqrt{3}V_{f-f}I\cos\varphi = 3p_{1\phi}$$

**La potencia instantánea trifásica es constante y vale 3 veces la potencia media de cada fase. De lo anterior se desprende que no existe una potencia reactiva trifásica (si existe por cada una de las fases --> caso similar al de las corrientes).**

## Definición

Un sistema en „por unidad" o en „tanto por uno" se realiza expresando las diversas magnitudes eléctricas (V, I, Z, etc.) como proporciones de magnitudes base o de referencia apropiadas:

$$\longrightarrow Valor(pu) = Valor[o/1] = \frac{Valor\,real}{Valor\,base}$$

## Ventajas

- Debido a que los valores reales se mueven entre fronteras estrechas, se facilita la detección de valores erróneos.

- Se simplifica el trabajo a través de distintos niveles de tensión, debido a que en el modelo equivalente no es necesario considerar el transformador ideal. Estos pueden ser reemplazados por su impedancia serie equivalente

- En el sistema expresado en „por unidad", los valores de los voltajes son cercanos a uno.

## Sistemas Monofásicos

- V, I, S, Z, son cantidades relacionadas entre sí --> fijando dos valores --> se fijan los otros dos.
- Generalmente se emplea la tensión VB (kV) y la potencia aparente SB (MVA) como bases de referencia --> bases de corriente (A) e impedancia (Ω) se calculan posteriormente

$$I_B = \frac{S_B}{V_B} \qquad Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{V_B^2}{S_B} \qquad S_B = V_B I_B = V_B \frac{V_B}{Z_B} = \frac{V_B^2}{Z_B}$$

- Valores base son escalares !

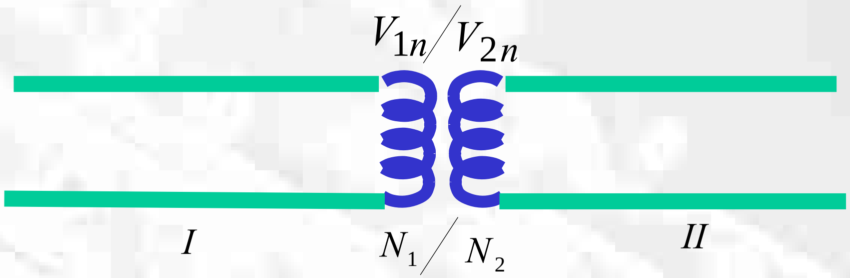
$$Z_B = X_B = R_B$$

$$P_B = Q_B = S_B$$

- Forma general de cálculo para magnitudes conocidas!

$$V_{pu} = \frac{V}{V_B}\frac{Volts}{Volts} \qquad I_{pu} = \frac{I}{I_B}\frac{Amp.}{Amp.} \qquad S_{pu} = \frac{S}{S_B}\frac{VoltAmp.}{VoltAmp.} \qquad Z_{pu} = \frac{Z}{Z_B}\frac{Ohm}{Ohm}$$

## - Transformador




- Transformador con razón de transformación N1:N2 e impedancia serie Z
- Suponemos impedancia referida al lado I, Z1
- Z1 puede ser referido al lado II como

$$Z_2 = \left[\frac{N_2}{N_1}\right]^2 Z_1$$

- Definiendo impedancias base para cada uno de los sectores se obtiene:

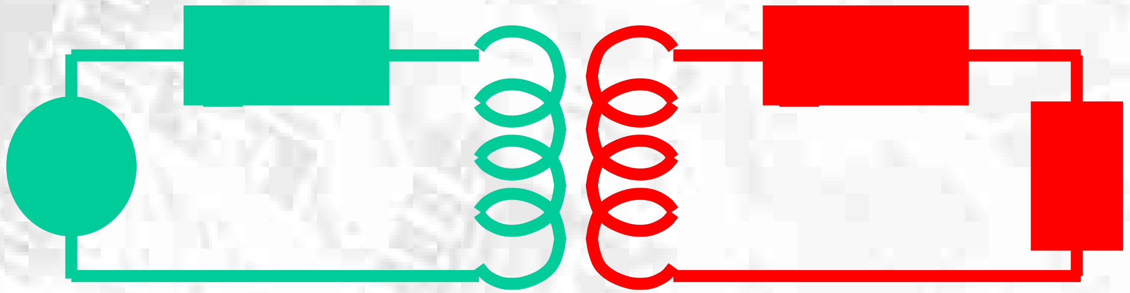
$$Z_{BI} = \frac{V_{BI}^2}{S_B} \qquad Z_{BII} = \frac{V_{BII}^2}{S_B} \qquad Z_1(pu) = \frac{Z_1 S_B}{V_{BI}^2} \qquad Z_2(pu) = \frac{Z_2 S_B}{V_{BII}^2}$$

$$Z_2(pu) = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{V_{BI}^2}{V_{BII}^2} Z_1(pu) \qquad Z_2(pu) = \left[\frac{N_2}{N_1}\right]^2 \frac{V_{BI}^2}{V_{BII}^2} Z_1(pu)$$

**Si** $\dfrac{V_{BII}}{V_{BI}} = \dfrac{N_2}{N_1}$

$$Z_2(pu) = Z_1(pu)$$

## Situación de cálculo en pu en sistema monofásico



Generador
datos
entregados
en base propia
10 MVA
15 kV

Transformador
datos
entregados
en base propia
25 MVA
10:100 kV

Datos de Línea
y consumos
entregados en otras
bases

Seleccionar una potencia base común para todo el sistema (ejemplo 10 MVA)

Voltajes base para el sector verde y rojo deben ser elegidos, de forma que la razón entre ellos sea 1:10
(ejemplo 10 kV (verde) y 100 kV (rojo))

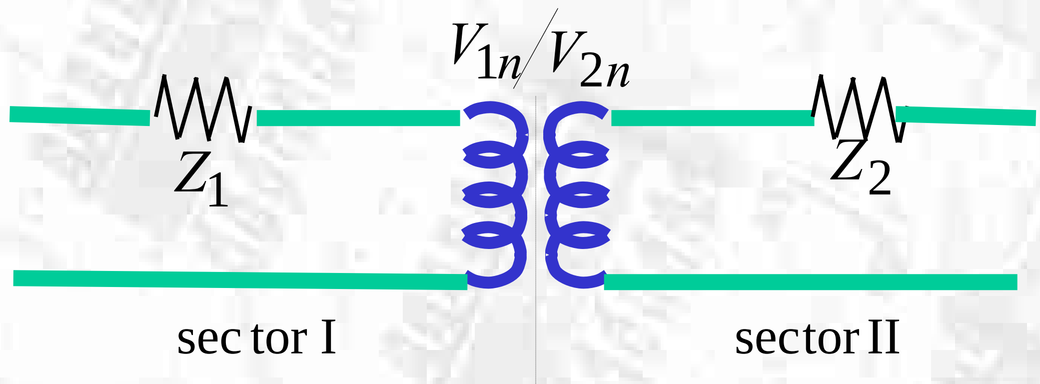
## Operatoria General

1- Se elige una potencia base SB común a todo el sistema

2- Se elige una tensión base en alguno de los sectores. Criterio de simplicidad para calcular otras tensiones base en el sistema

3- Las tensiones base en los sectores deben cumplir las relaciones

$$\frac{V_{BI}}{V_{BII}} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}}$$




4- Teniendo VB y SB en cada sector --> impedancias en por uno (cuidado con valores expresados en base propia !)

$$Z(pu\ \text{base}\ 1) = Z(pu\ \text{base}\ 2)\frac{S_{B1}}{S_{B2}}\left(\frac{V_{B2}}{V_{B1}}\right)^2$$

## Sistemas trifásicos

Para los sistemas trifásicos se tienen las mismas ventajas y procedimientos antes señalados, en la medida que se respeten las siguientes reglas:

1- Se hace uso de una potencia base trifásica común para todo el sistema

$$S_{\text{base }3\phi} = 3S_{\text{base }1\phi}$$

2- Una vez elegido un voltaje base en un punto del sistema, los voltajes base para otros sectores deben variar acorde a la razón de transformación fase-fase de los transformadores.

3- Fórmulas convenientes que relacionan sistemas trifásicos y monofásicos

$$S_{\text{base }1\phi} = V_{\text{base }f-n} I_{\text{base}}$$

$$I_{\text{base }1\phi} = \frac{S_{\text{base }1\phi}}{V_{\text{base }1\phi}} = \frac{S_{\text{base }3\phi}/3}{V_{\text{base }f\text{-f}}/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{S_{\text{base }3\phi}}{V_{\text{base }3\phi}}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{V^2_{\text{base }f-n}}{S_{\text{base }1\phi}} = \frac{\left[V_{\text{base }f-f}/\sqrt{3}\right]^2}{S_{\text{base }3\phi}/3} = \frac{V^2_{\text{base }f-f}}{S_{\text{base }3\phi}}$$