



## Contenido (IV)

### **4. Estudio de sistemas de potencia en estado estacionario, regulación de tensión y control de reactivos**

**4.1 Introducción**

**4.2 Modelo estacionario de la red**

**4.3 Métodos de flujo de potencia**

**4.4 Métodos de regulación de tensión**

**4.5 Estimadores de estado**



## Introducción (I)

### Definición del Problema

El objetivo general de este capítulo es el de poder determinar la condición de operación de una red, bajo los siguientes supuestos:

- Estado de operación estacionario
- Cargas equilibradas



Estudios de flujos de potencia  
(Planificación y Operación)



### Objetivo General

- Determinación de voltajes complejos en todos los nodos del sistema
- Cálculo de los flujos de potencia activa y reactiva en elementos de unión (líneas aéreas, cables de poder, transformadores), pérdidas.
- Estrategias de regulación de tensión y control de reactivos



# Modelo Estacionario de la Red (I)

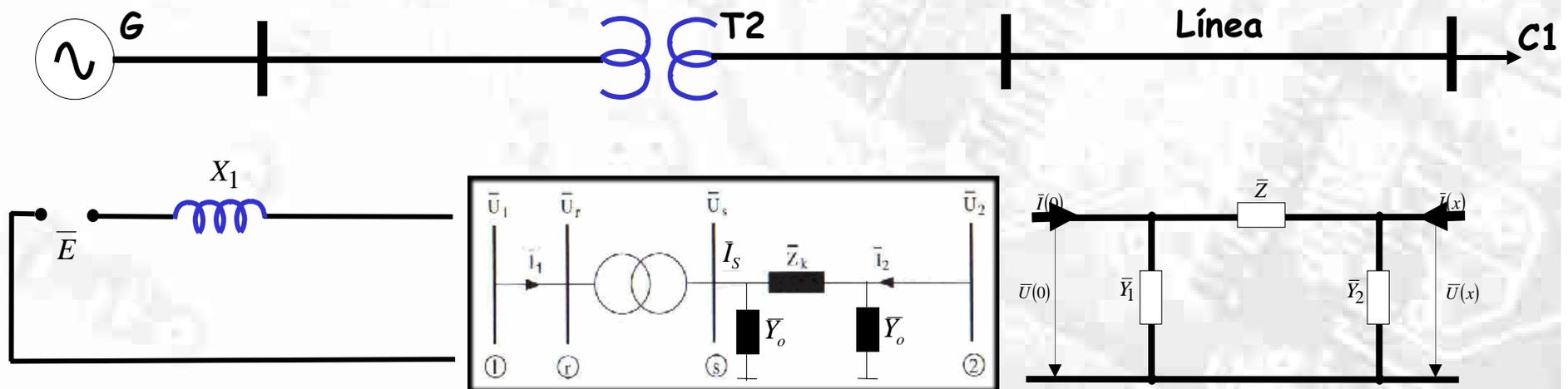
## Datos del Modelo

El modelo estacionario requiere de una representación de la red que supone los siguientes aspectos:

- Conocimiento de los consumos en los nodos del sistema
- Representación del sistema en función de un modelo Nodo-Rama



Utilización de modelos de componentes vistos en capítulo 3!

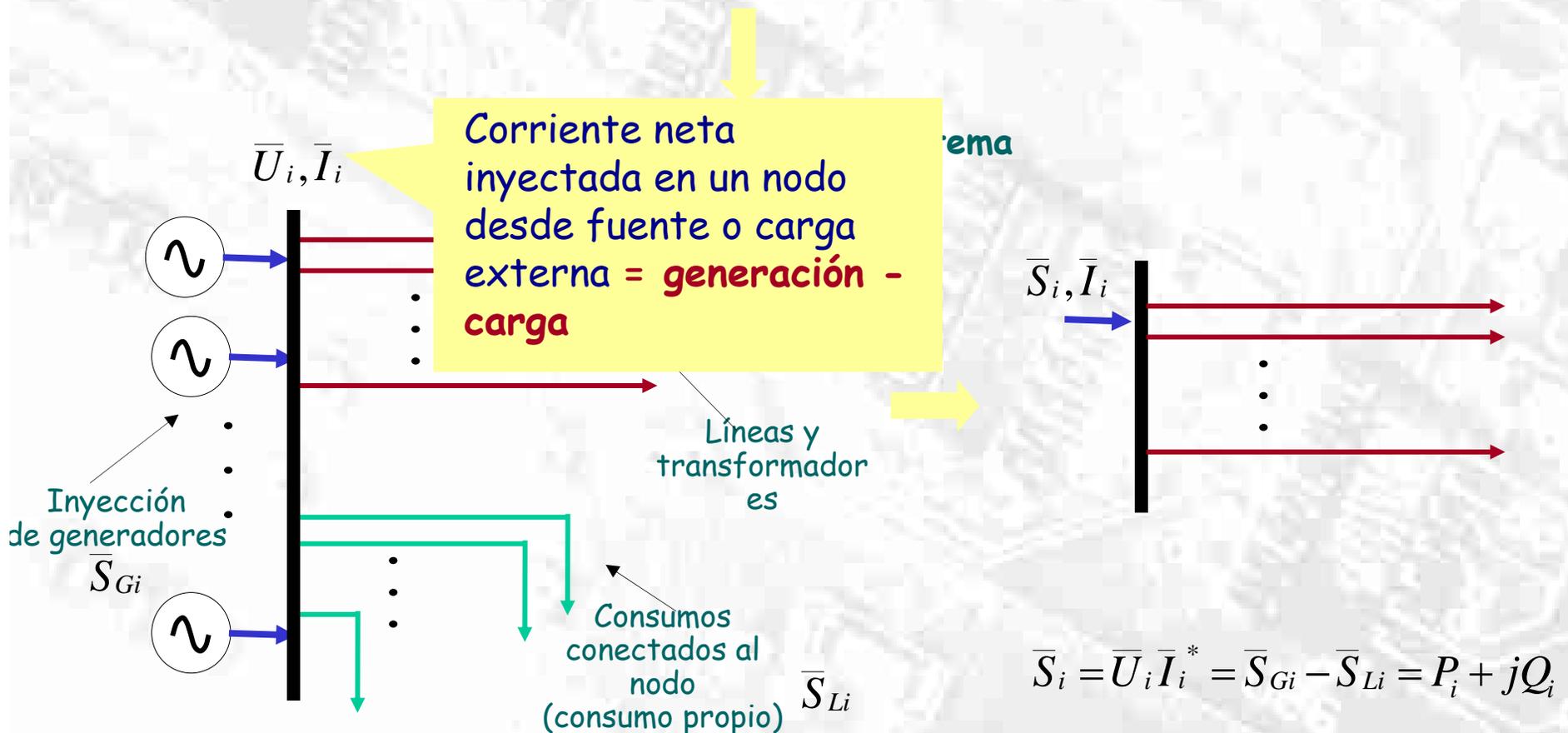




## Modelo Estacionario de la Red (II)

### Modelo Lineal de la Red

Para la representación matemática de una red en estado estacionario es conveniente el uso de la matriz de admitancia nodal  $Y$ . Para ello se define en cada nodo  $i$  del sistema la corriente de nodo  $\bar{I}_i$  y el voltaje de nodo  $\bar{U}_i$



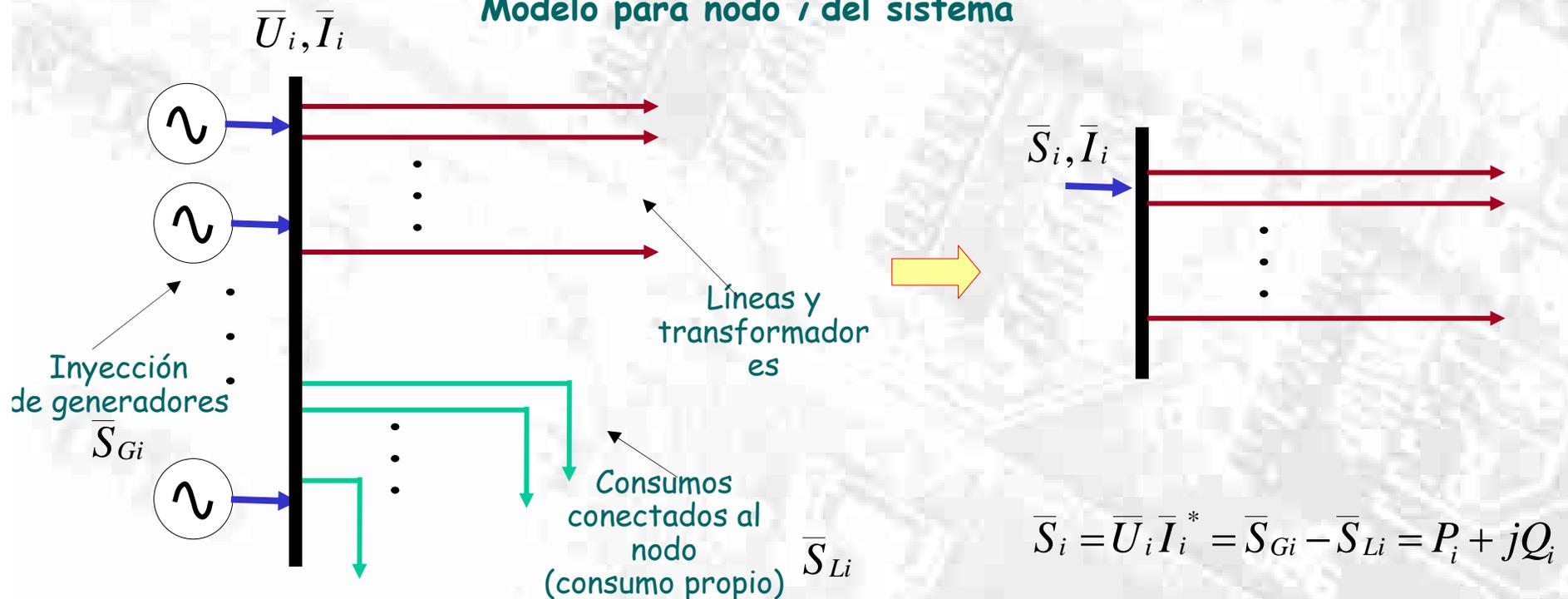


## Modelo Estacionario de la Red (II)

### Modelo Lineal de la Red

Para la representación matemática de una red en estado estacionario es conveniente el uso de la matriz de admitancia nodal  $Y$ . Para ello se define en cada nodo  $i$  del sistema la corriente de nodo  $\bar{I}_i$  y el voltaje de nodo  $\bar{U}_i$

#### Modelo para nodo $i$ del sistema

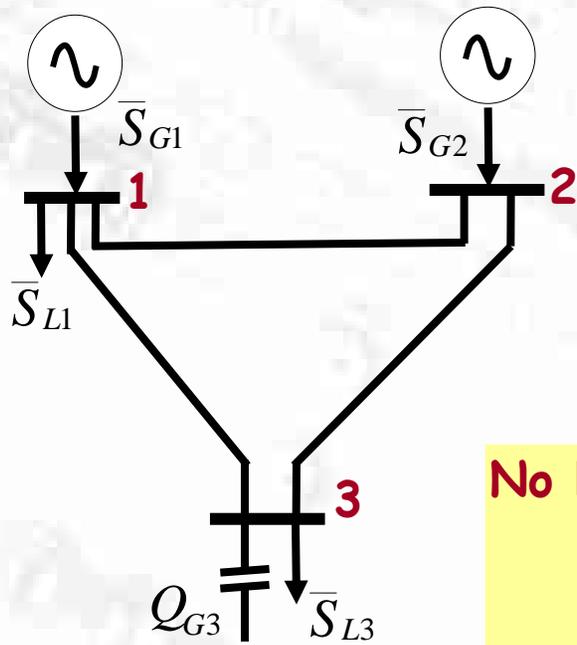




## Modelo Estacionario de la Red (III)

Las corrientes y voltajes de nodos quedan relacionados por la matriz de admittancia nodal

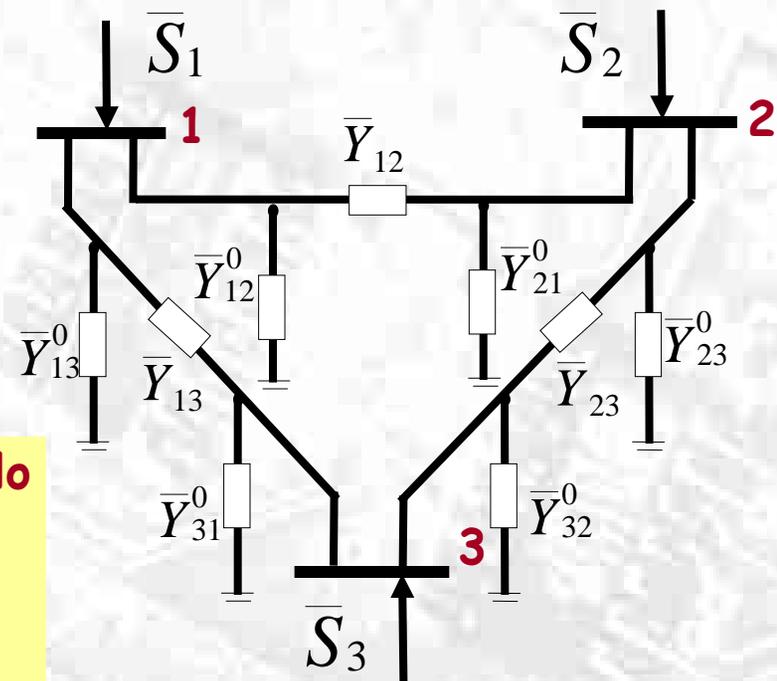
$$[\bar{I}] = [\bar{Y}][\bar{U}]$$



Unilinear

No linealidad de modelo General

$$\bar{S}_i = \bar{U}_i \bar{I}_i^*$$



Modelo Equivalente Monofásico

4. Estudio de sistemas de potencia en estado estacionario, regulación de tensión y control de reactivos



## Modelo Estacionario de la Red (IV)



Armado de la matriz de admitancia

$$[\bar{I}] = [\bar{Y}][\bar{U}]$$

Elementos  
de la matriz  
de admitancia  $\bar{y}_{ij}$

La regla general para la construcción de la matriz de admitancia está dada por:

**Elemento de la Diagonal**

$$\bar{y}_{ii} = \sum_{k: \bar{Y}_{ik} \in \alpha(i)} \bar{Y}_{ik}$$

**Elemento fuera de la Diagonal**

$$\bar{y}_{ij} = -\bar{Y}_{ij}$$

### Propiedades

- Simétrica (caso general)
- Dispersa (matriz rala)
- Inversa (matriz densa, si existe)



## Modelo Estacionario de la Red (V)

### Modelo No Lineal de Red

En sistemas de potencia se conocen las potencias complejas en los nodos que resultan de la diferencia entre la potencia inyectada por los generadores y la retirada por los consumos.



#### Modelo de red no lineal

Potencia  
aparente  
neta

$$\bar{S}_i = \bar{U}_i \bar{I}_i^* = \bar{S}_{Gi} - \bar{S}_{Li} = P_i + jQ_i$$



Reemplazando relación de matriz de admitancia,  
válida para los  $n$  nodos del sistema

$$\bar{S}_i = \bar{U}_i \bar{I}_i^* = \bar{U}_i \sum_{j=1}^n \bar{y}_{ij}^* \bar{U}_j^*$$



Determinación de Flujos de Potencia

$$\bar{S}_{ij}^* = \bar{U}_i^* \bar{I}_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij} = \bar{U}_i^* (\bar{U}_i - \bar{U}_j) \bar{Y}_{ij} + \bar{U}_i^2 \bar{Y}_{ij}^0$$

$$\bar{S}_{ji}^* = \bar{U}_j^* \bar{I}_{ji} = P_{ji} + jQ_{ji} = \bar{U}_j^* (\bar{U}_j - \bar{U}_i) \bar{Y}_{ij} + \bar{U}_j^2 \bar{Y}_{ji}^0$$



## Modelo Estacionario de la Red (VI)

### Especificación de las ecuaciones de balance de flujo de potencia (coordenadas polares)

Nodo de Referencia

$$\bar{U}_1 = U_1 \angle 0^\circ$$

Otros Nodos

$$\bar{U}_i = U_i \angle \delta_i$$

Elementos de la matriz de admitancia  $Y$

$$\bar{y}_{ij} = y_{ij} \angle \theta_{ij}$$

Balance de flujo nodo  $i$

$$P_i = P_{Gi} - P_{Li} = \sum_{j=1}^n U_i U_j y_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$$

$$Q_i = Q_{Gi} - Q_{Li} = \sum_{j=1}^n U_i U_j y_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$$

Variables del sistema

$$P_{Gi}, P_{Li}, Q_{Gi}, Q_{Li}, U_i, \delta_i$$



## Modelo Estacionario de la Red (VII)

### Característica del problema

- No lineal
- 6 variables por nodo
- $2n$  ecuaciones

### Caracterización de nodos en el sistema

- Barras PQ (85%) --> barras de carga o de pasada
- Barras PV (15%) --> barras de generación
- Barra libre (1) (barra slack, referencia) --> es una barra de generación específica



Gauss/Seidel

Newton/Raphson



## Métodos de Flujo de Potencia

En esta sección se estudiarán dos métodos iterativos importantes (y sus variantes) para la solución del sistemas de ecuaciones no lineales de flujos de potencia: Gauss-Seidel, Newton-Raphson.

### Método de Gauss-Seidel

- Forma general:

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = F(x)$$

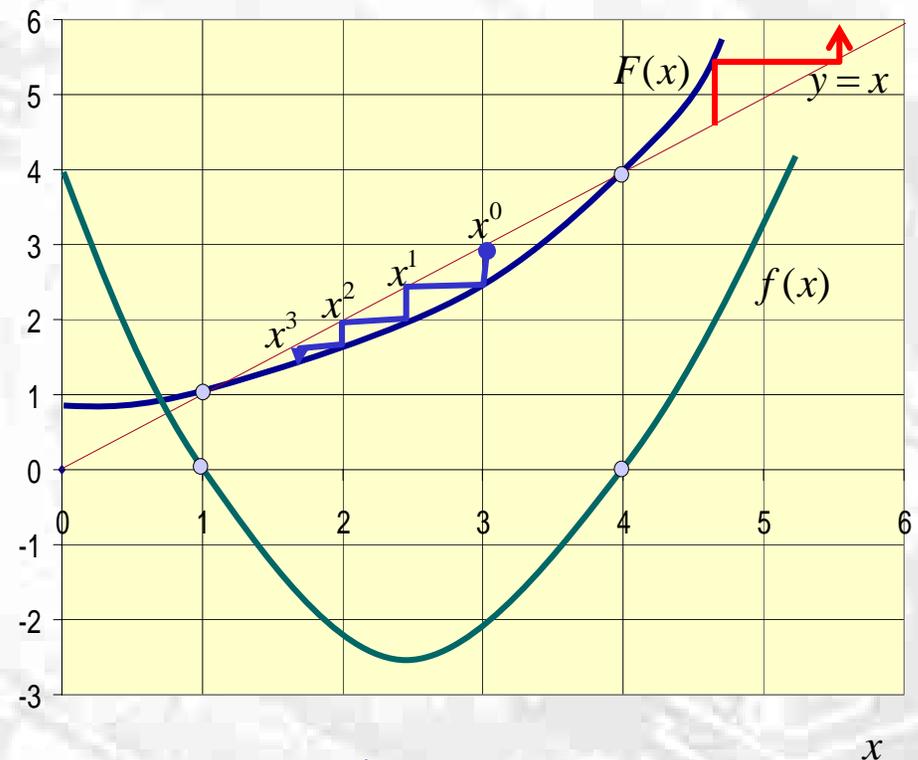
$$x^1 = F(x^0)$$

$$|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon \quad \leftarrow \text{tolerancia}$$

- Ejemplo

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0$$

$f(x), F(x)$



Método de Gauss



## Modelo Estacionario de la Red (IX)

### Operatoria General

- Se supone tensión en cada nudo
- Se resuelven las ecuaciones PQ, PV
- Se obtienen nuevas tensiones iterando hasta

$$\left| V_i^{k+1} - V_i^k \right| \leq \varepsilon$$

### Caso Ejemplo

Utilizar método de Gauss-Seidel para el sistema mostrado en la figura.

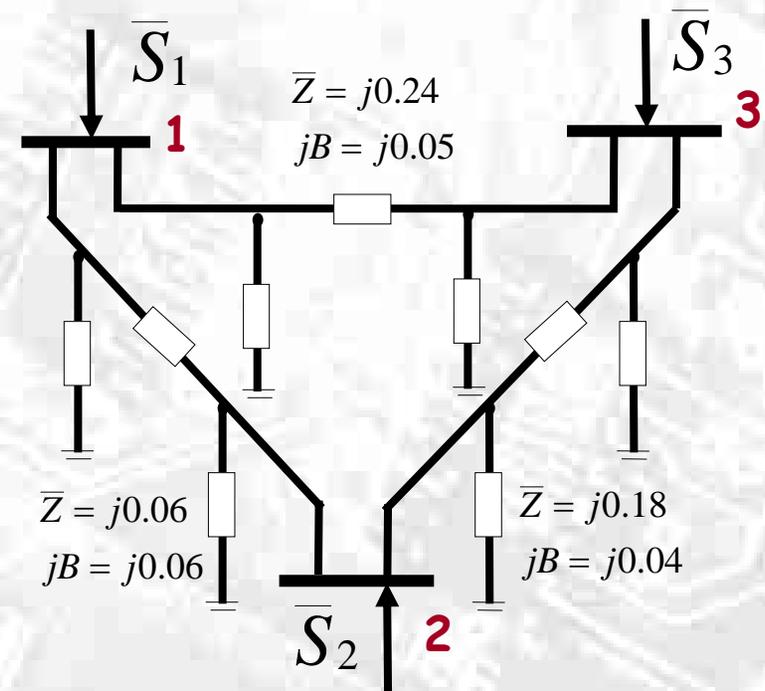
$$S_{L2} = 0.2 + j0.1$$

$$S_{L3} = 1.3 + j0.2$$

$$\text{Barra ref. } V_1 = 1.06 \angle 0^\circ, \quad |V_2| = 1.04$$

Determine flujo de potencia si  $P_{G2} = 0.4$

### Ejemplo de Aplicación





## Modelo Estacionario de la Red (X)

### Operatoria

- Se supone tensión en cada nudo
- Se resuelven las ecuaciones PQ, PV

$$\bar{V}_i = \frac{1}{y_{ii}} \left[ \bar{I}_i - \sum_{j \neq i} \bar{y}_{ij} \bar{V}_j \right]$$

### Barras PQ

$$\bar{I}_i = \left( \frac{\bar{S}_i}{\bar{V}_i} \right)^*$$

### Barras PV

$$\begin{aligned} \bar{S}_i &= P_i + jQ_i \\ &= \bar{V}_i \bar{I}_i^* = \bar{V}_i \sum_j (\bar{y}_{ij} \bar{V}_j)^* \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_i = \left( \frac{\bar{S}_i}{\bar{V}_i} \right)^*$$

- Se obtienen nuevas tensiones iterando hasta

$$\left| V_i^{k+1} - V_i^k \right| \leq \varepsilon$$

### Variaciones del método

- Uso de variables actualizadas
- Factor de aceleración  $V_i^{k+1} = V_i^k + \alpha \left[ V_{i, \text{calculado}}^k - V_i^k \right]$



## Modelo Estacionario de la Red (XI)

### Método de Newton-Raphson

Este método es comparativamente: más complejo, requiere mayor volumen de cálculos por iteración, presenta mejores características de convergencia (número de iteraciones, rapidez).

- Forma general:

Sea  $f(x) = 0$

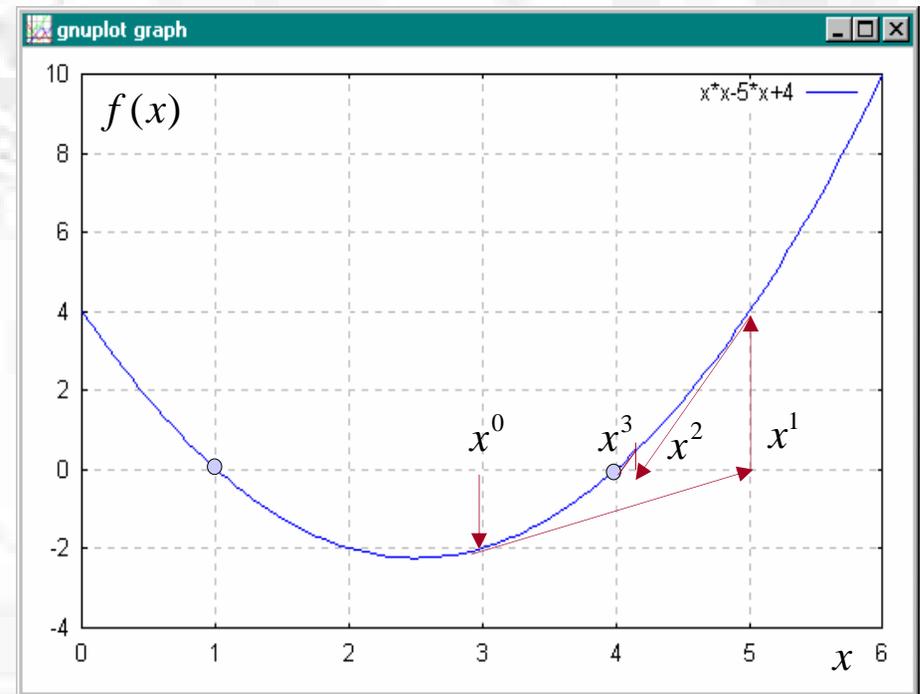
Desarrollando en series de Taylor

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{1!} \frac{df(x^0)}{dx} (x - x^0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x^0)}{dx^2} (x - x^0)^2 + \dots = 0$$

➔ 
$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{\frac{df(x^k)}{dx}}$$

- Ejemplo

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0$$



### Método de Newton



## Modelo Estacionario de la Red (XII)

### Operatoria

- Descripción de variables

$$\bar{V}_i = V_i \angle \theta_i \quad \bar{y}_{ij} = y_{ij} \angle \delta_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad \theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$$

- Ecuaciones generales

$$\bar{S}_i = P_i + jQ_i$$

$$= \bar{V}_i I_i^* = \bar{V}_i \sum_j (\bar{y}_{ij} \bar{V}_j)^*$$



$$P_i = \sum_j (V_i V_j y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \delta_{ij}))$$

$$= V_i \sum_j (V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})))$$

$$Q_i = \sum_j (V_i V_j y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j - \delta_{ij}))$$

$$= V_i \sum_j (V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})))$$

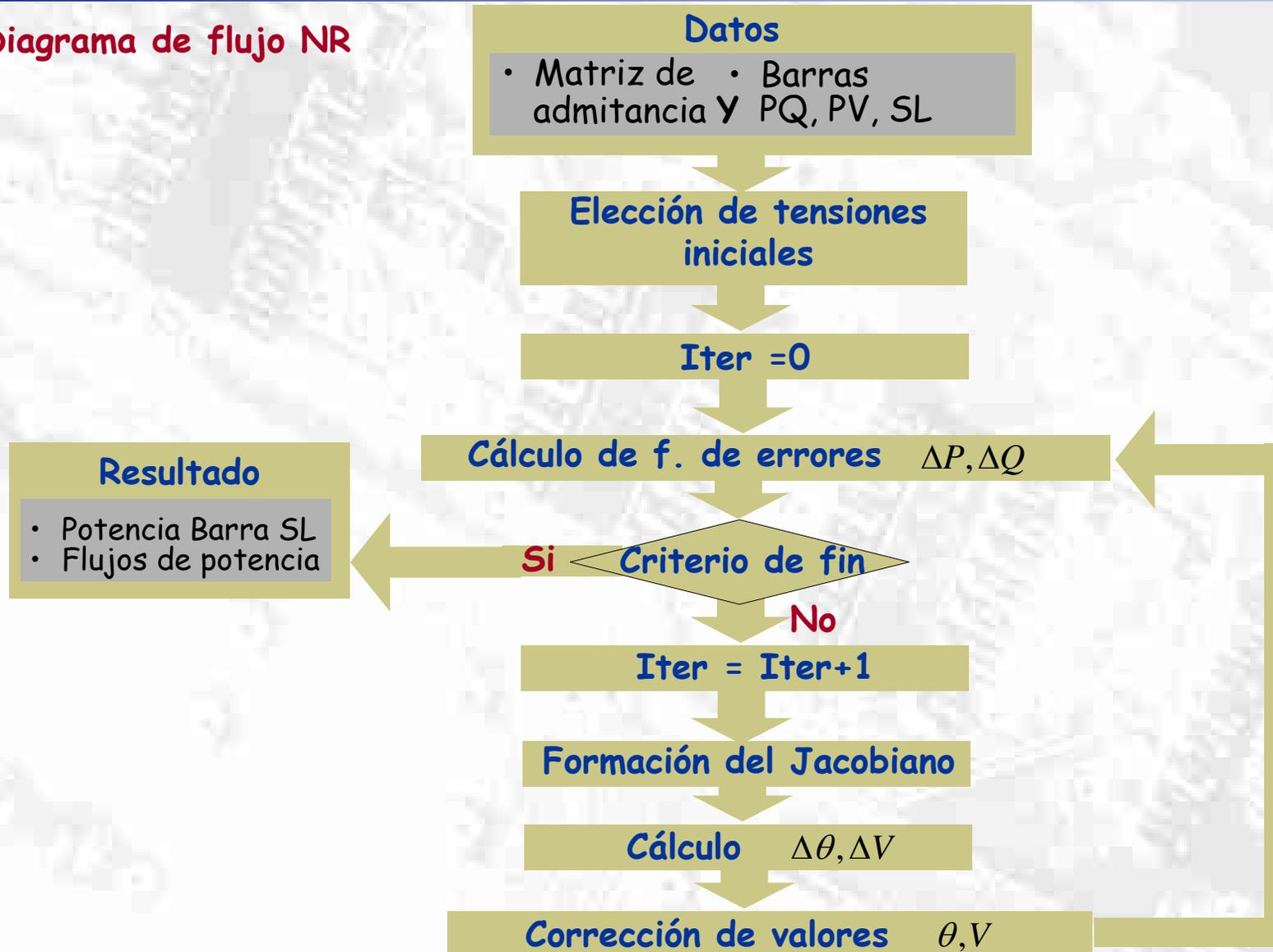
- Forma General método de NR

$$\begin{matrix} N-1 & \longrightarrow & \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \\ \text{Número de} & & \\ \text{nodos PQ} & & \end{matrix} = -[\mathbf{J}] \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$



## Modelo Estacionario de la Red (XIII)

### Diagrama de flujo NR





## Modelo Estacionario de la Red (XIV)

### Método de Newton-Raphson desacoplado/rápido (Stott, Alsac 1970-1972)

Este método aprovecha características matriciales de los sistemas reales logrando acelerar considerablemente los cálculos requeridos en cada iteración.

#### • Simplificaciones consideradas

##### 1. Relación Resistencia/Reactancia

$$R_{ij} \ll X_{ij} \longrightarrow y_{ij} = -\frac{1}{Z_{ij}} = y_{ij} \angle 90^\circ$$

Elementos fuera de la diagonal

$$B_{ij} = \frac{1}{X_{ij}}$$

##### 2. Se desprecia conductancia de línea

$$G_{ij} \approx 0 \longrightarrow y_{ii} = y_{ii} \angle \pm 90^\circ$$

##### 3. Diferencia de ángulo de fase entre nodos conectados

$$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j \longrightarrow \text{pequeña} \longrightarrow \sin \theta_{ij} \approx \theta_{ij}, \cos \theta_{ij} \approx 1$$

#### 4. Estudio de sistemas de potencia en estado estacionario, regulación de tensión y control de reactivos



# Modelo Estacionario de la Red (XV)

## • Modelo Resultante

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = -[\mathbf{J}] \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

Debido a supuestos

Por conveniencia en el cálculo

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = -[\tilde{\mathbf{J}}] \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix}$$

$$\Delta V/V = \begin{bmatrix} \Delta V_1/V_1 \\ \vdots \\ \Delta V_n/V_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq 2}^n y_{2j} & -y_{23} & \cdots & -y_{2n} \\ -y_{23} & \sum_{j=1, j \neq 3}^n y_{3j} & & -y_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -y_{2n} & -y_{3n} & & \sum_{j=1}^{n-1} y_{nj} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{L}} \rightarrow \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} -2y_{22} - \sum_{j=1, j \neq 2}^n y_{2j} & -y_{23} & \cdots & -y_{2n} \\ -y_{23} & -2y_{33} - \sum_{j=1, j \neq 3}^n y_{3j} & & -y_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -y_{2n} & -y_{3n} & & -2y_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} y_{nj} \end{bmatrix}$$



# Modelo Estacionario de la Red (XVI)



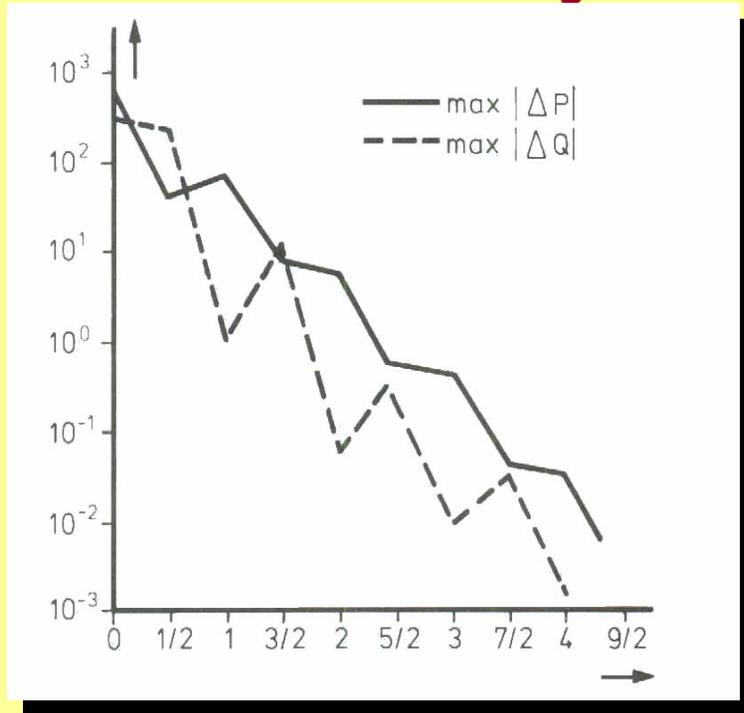
Simplificación adicional

$$U_i \approx U_j$$

$$\text{diag}U = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & U_n \end{bmatrix}$$

## Proceso de Convergencia

Error



Número de Iteración

Modelo

$$B' \Delta \theta =$$

Permisos  
matriciales  
de eficiencia

de Potencia  
activa

$$= [\text{diag}U]^{-2} \Delta Q$$

desacoplados con

ambos modelos.

4. Estudio de sistemas de potencia en estado estacionario, regulación de tensión y control de reactivos



## Modelo Estacionario de la Red (XVI)

Simplificación  
adicional

$$U_i \approx U_j$$

$$\text{diag}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_3 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & U_n \end{bmatrix}$$

Modelo de Potencia  
Activa

$$\mathbf{B}' \Delta\theta = [\text{diag}\mathbf{U}]^{-2} \Delta P$$

Modelo de Potencia  
Reactiva

$$\mathbf{B}'' \frac{\Delta U}{U} = [\text{diag}\mathbf{U}]^{-2} \Delta Q$$

Permite replantear diagrama de flujo a través de dos modelos desacoplados con matrices de coeficientes constantes. El método resuelve iterativamente ambos modelos.



## Modelo Estacionario de la Red (XVII)

### Flujo de Potencia en Continua Modelo (P-Delta) o (P-Theta)

Este método puede ser estudiado y entendido como una consecuencia natural de las simplificaciones utilizadas en el método de NR desacoplado rápido. Los resultados entregados por este cálculo aproximado son suficientes para una amplia gama de estudios: contingencias, económicos, etc..

Modelo de Potencia Activa

$$\mathbf{B}' \Delta \theta = [\text{diag} \mathbf{U}]^{-2} \Delta P$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq 2}^n y_{2j} & -y_{23} & \cdots & -y_{2n} \\ -y_{23} & \sum_{j=1, j \neq 3}^n y_{3j} & & -y_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -y_{2n} & -y_{3n} & & \sum_{j=1}^{n-1} y_{nj} \end{bmatrix}$$

Simplificación adicional

$$U_i \approx 1 \text{ pu}$$

$$[P] = \mathbf{B}' [\theta]$$

$$P_{ij} = \frac{1}{X_{ij}} (\theta_i - \theta_j)$$



## Modelo Estacionario de la Red (XVIII)

### Análisis de Sensibilidad en Ecuaciones de Flujo de Potencia

Bajo el supuesto de que se ha alcanzado un estado de operación estacionario es posible estudiar el efecto de pequeñas variaciones (perturbaciones) sin necesidad de resolver nuevamente el flujo de potencia --> análisis de sensibilidad del sistema.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Variables de estado  $\mathbf{x}$       Variables de control  $\mathbf{u}$  (SG)      Variables de perturbación  $\mathbf{p}$  (SL)

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_u \Delta \mathbf{u} - \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_p \Delta \mathbf{p}$$

Matrices de sensibilidad



## Modelo Estacionario de la Red (XIX)

### Consideraciones Finales Sobre Flujo de Potencia

El cálculo de la operación en estado estacionario a través de un flujo de potencia no asegura un resultado que respete límites técnicos de operación, tales como :

- Capacidad de transmisión de líneas y transformadores
- Voltaje en barras dentro de límites o banda aceptable



- Conexión de elementos adicionales (Líneas, transformadores)
- Compensación reactiva (capacitiva, inductiva)
- Transformadores reguladores
- Equipos FACTS



## Métodos de Regulación de Tensión (I)

### Introducción

El objetivo central de la regulación de tensión es mantener la tensión en equipos a lo largo del día (año) de manera de no afectar su vida útil. Lo anterior depende del tipo y características de los equipos:

- **Tensión nominal y rangos de operación (banda):**
- **Tipos de equipos:**
  - Central generadora
  - Líneas de transmisión
  - Redes de distribución
- **Tipos de variaciones:**
  - Lentas
  - Bruscas (variaciones del tipo parpadeo)
  - Caídas de tensión



## Métodos de Regulación de Tensión (II)

### Formas de regular variaciones lentas de tensión

Sólo se detallarán métodos utilizados para regular variaciones lentas. No se estudia el desfase del fasor tensión (control de estabilidad).

- **Métodos más empleados**
  - Inyección o absorción de potencia reactiva
  - Inserción de tensión serie adicional
  - Modificación de la reactancia
- **Forma de actuar:**
  - Regulación continua
  - Regulación cuasi-continua
  - Regulación intermitente
  - Regulación fija



## Métodos de Regulación de Tensión (III)

### Regulación por inyección de potencia reactiva

La forma básica para mejorar la regulación de tensión será reducir el flujo de reactivos, produciéndolos directamente donde se necesitan, no transportándolos desde las centrales.

- **Sistemas radiales:**

- Gradiente

- Parámetros ABCD

$$P_i = \sum_j (V_i V_j y_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j - \delta_{ij}))$$

$$Q_i = \sum_j (V_i V_j y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j - \delta_{ij}))$$

- **Sistemas enmallados:**

- Flujo de potencia

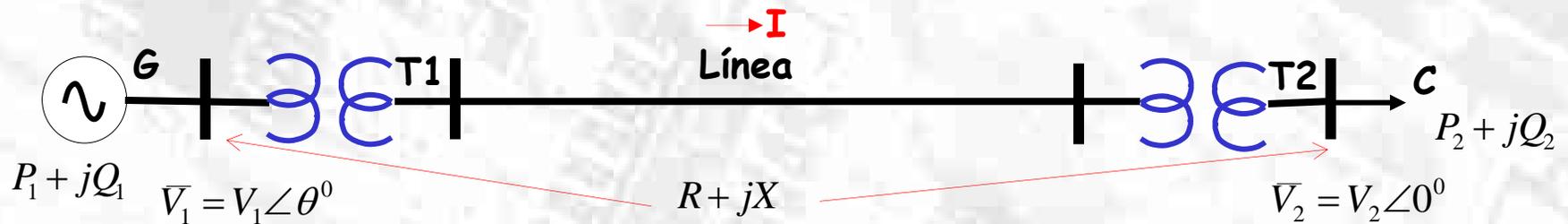
- Factores de Influencia



## Métodos de Regulación de Tensión (IV)

### Transmisiones que no incluyen admitancias

Para este caso se puede establecer una relación lineal entre de los requerimientos de reactivos de un consumo determinado a través del gradiente  $G$ .

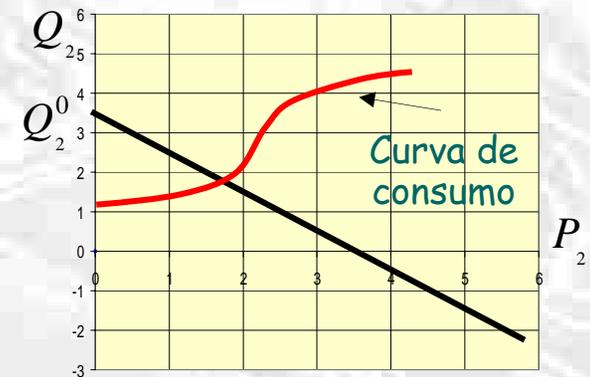


$$I = \left( \frac{S_1}{V_1} \right)^* = \left( \frac{S_2}{V_2} \right)^* = \frac{P_1 - jQ_1}{V_1^*} = \frac{P_2 - jQ_2}{V_2}$$

$$\Delta \bar{V} = I \bar{Z} = \left( \frac{P_1 - jQ_1}{V_1^*} \right) (R + jX) = \left( \frac{P_2 - jQ_2}{V_2} \right) (R + jX)$$

$$G = |\bar{V}_1| - |\bar{V}_2| \approx \left( \frac{RP_1 + XQ_1}{V_1} \right) \approx \left( \frac{RP_2 + XQ_2}{V_2} \right) \approx \frac{XQ}{V}$$

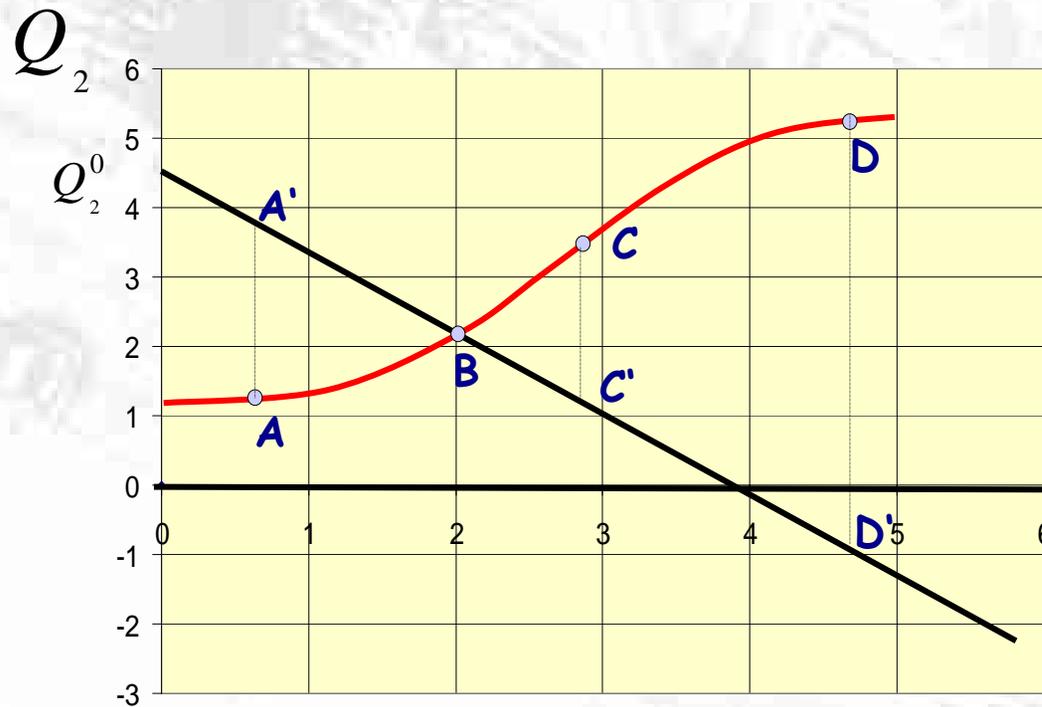
$$\Rightarrow GV_2 = RP_2 + XQ_2 \quad \Rightarrow Q_2 = \frac{GV_2}{X} - \frac{RP_2}{X}$$



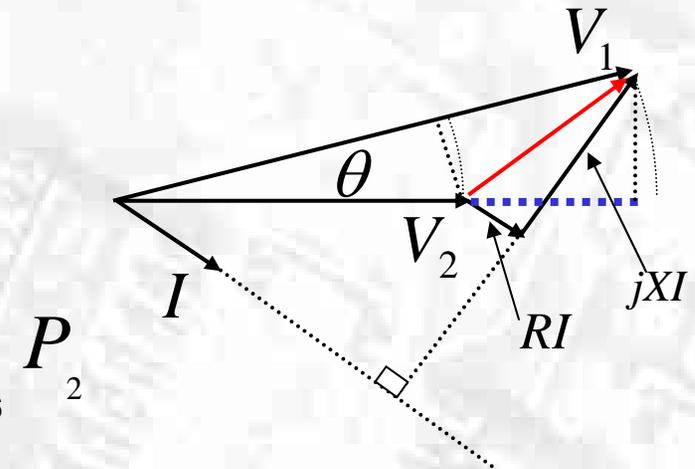


## Métodos de Regulación de Tensión (V)

### Estudio de Puntos de Operación



$$Q_2 = \frac{GV_2}{X} - \frac{RP_2}{X}$$



### Transmisiones Radiales que Incluyen Admitancias

Trabajo con parámetros ABCD y diagrama de círculo (visto en capítulo de líneas de transmisión).



# Métodos de Regulación de Tensión (VI)

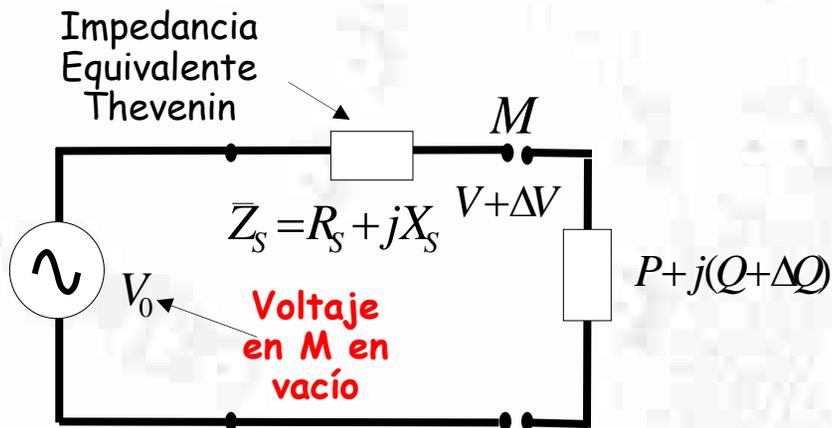
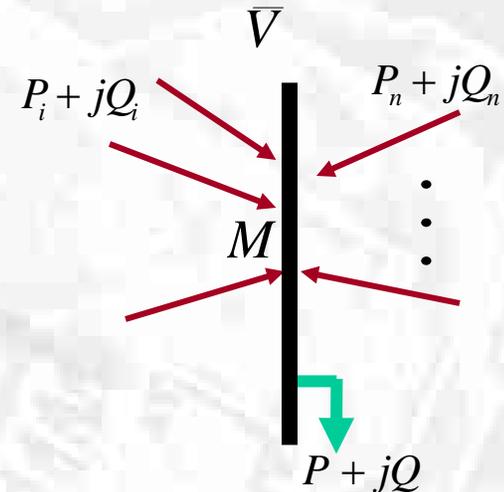
## Caso General de Sistema Enmallado

Generalización a un punto cualquiera M de un sistema eléctrico donde existe un consumo  $P+jQ$  y una tensión  $V$ .

$$P = \sum_j P_j \quad Q = \sum_j Q_j$$

Existe una función, tal que  $\Rightarrow V = F(P, Q)$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)dP + \left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)dQ = \frac{dP}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)} + \frac{dQ}{\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{Factores} \\ \text{de} \\ \text{Influencia} \end{matrix}$$



**Caso general**

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right) = \frac{V_0 - 2V}{X_s}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = \frac{V_0 - 2V}{R_s}$$

**Caso sin consumo previo**

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right) = \frac{-V}{X_s}$$

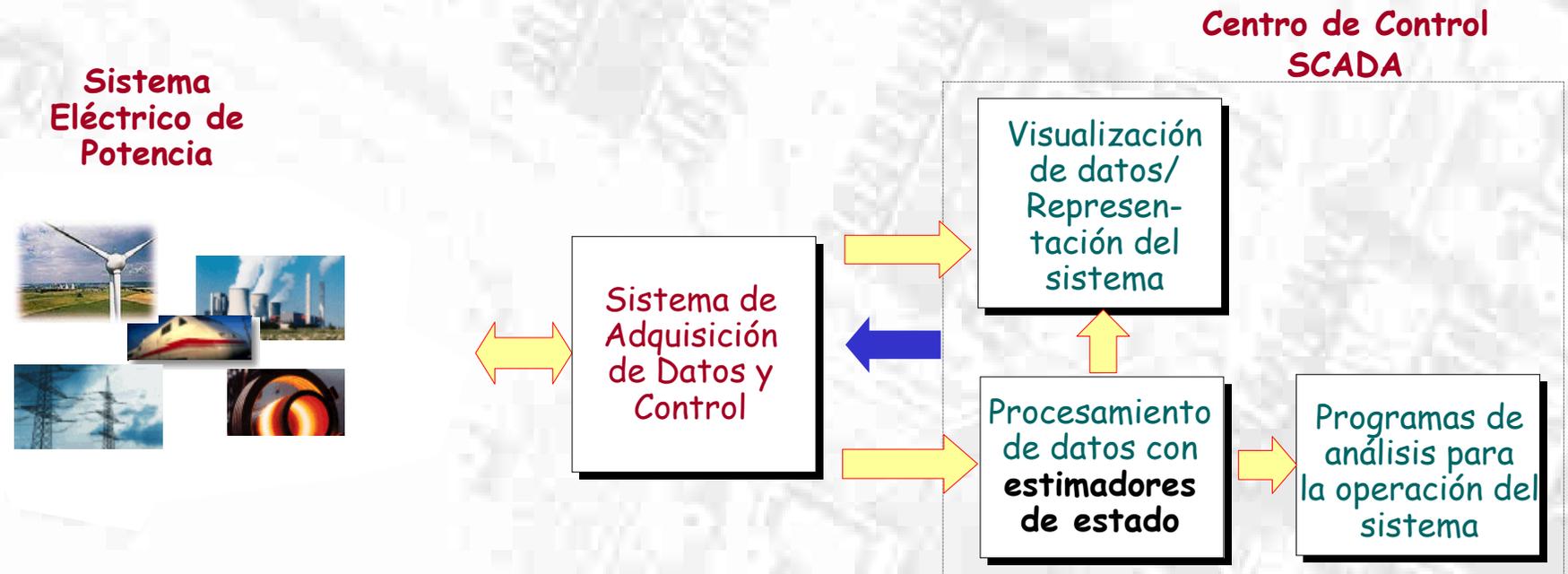
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = \frac{-V}{R_s}$$



## Estimadores de Estado (I)

### Introducción

Hasta el momento en el estudio de la operación en estado estacionario hemos supuesto un conjunto de parámetros como fijos. Lo anterior es válido para estudios en el ámbito de la planificación. Sin embargo, para poder calcular las condiciones actuales de operación del sistema (operación real) esta simplificación no es válida. Esto queda de manifiesto, para el caso del flujo de potencia, en el momento de fijar 4 de las 6 variables en cada nodo del sistema. Los estimadores de estado (state estimation) entregan un método sistemático para tratar esta problemática en los centros de control.

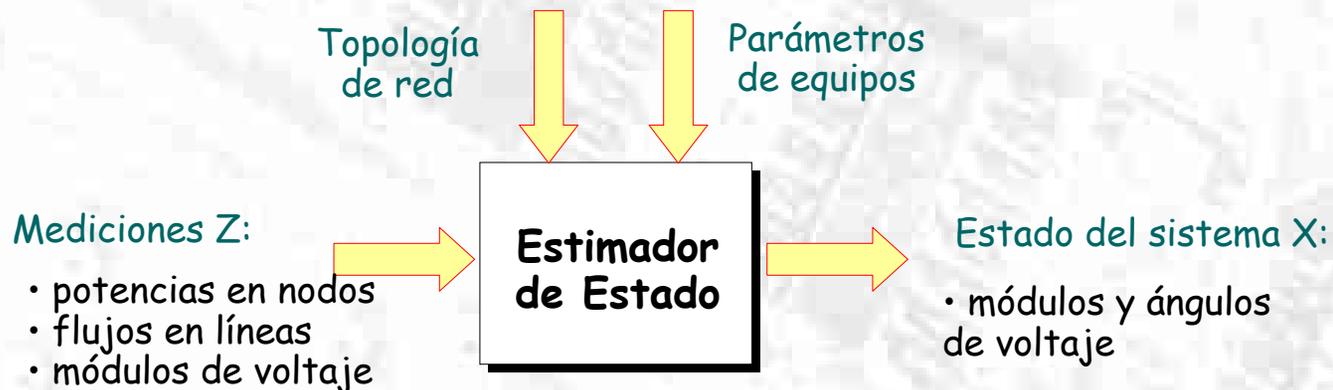




### Modelo General

#### • Características generales:

- Errores gruesos producto de mal funcionamiento.
- Errores de precisión, naturaleza aleatoria.
- Ausencia de mediciones.
- Cambios en la topología de la red no considerados.



Obtener mediante criterios estadísticos, la "mejor estimación" de las variables de estado, considerando que pueden existir errores y redundancia en los datos.

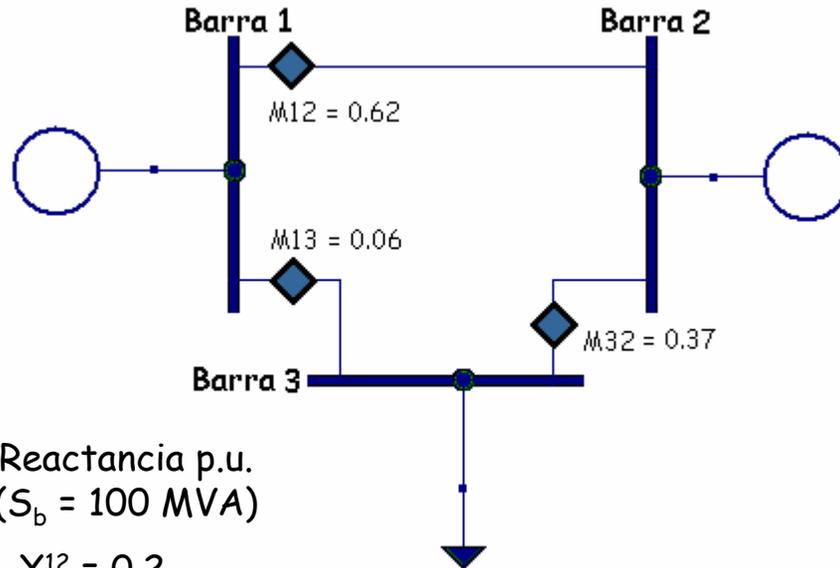
- Modelos de Estimación lineal
- Modelos de Estimación no lineales



## Ejemplo 2

### •Flujo de potencia DC

estimar el valor de las inyecciones de potencia y ángulos relativos en cada barra a partir de las mediciones  $M_{12}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{32}$



Reactancia p.u.  
( $S_b = 100$  MVA)

$$X^{12} = 0.2$$

$$X^{13} = 0.4$$

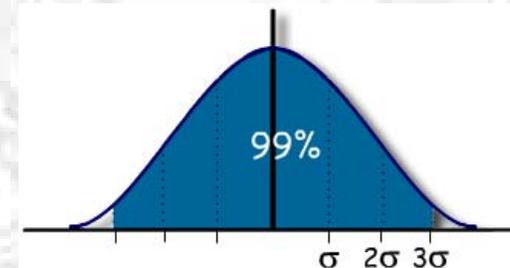
$$X^{23} = 0.25$$

### Características Medidores

$$P_b = 100 \text{ MW}$$

$M_{13}$ ,  $M_{32}$ : Precisión  $\pm 3$  MW  
( $\sigma = 1 \text{ MW} = 0.01 \text{ p.u.}$ )

$M_{12}$ : Precisión  $\pm 0.3$  MW  
( $\sigma = 0.1 \text{ MW} = 0.001 \text{ p.u.}$ )



**Precisión:** Usualmente se define como el error máximo admisible para el 99% de las mediciones. Suponiendo distribución normal:  
Precisión =  $3\sigma$



## Estimadores de estado (IV)

- Identificando términos en la ecuación 4.3:

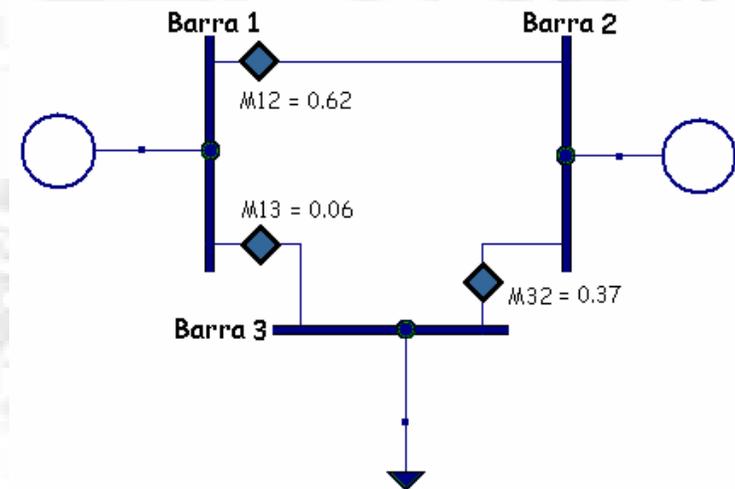
$$\vec{x}^{est} = \left[ [H]^T [R]^{-1} [H] \right]^{-1} [H]^T [R]^{-1} \vec{z}^{med}$$

Matriz de covarianza del error de las mediciones

$$[R] = \begin{bmatrix} \sigma_{M12}^2 & & \\ & \sigma_{M13}^2 & \\ & & \sigma_{M32}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-4} & & \\ & 10^{-6} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \theta_1^{est} \\ \theta_2^{est} \end{bmatrix} \quad \vec{z}^{med} = \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{13} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.06 \\ 0.37 \end{bmatrix}$$

(ángulos referidos a  $\theta_3$ )





## Estimadores de estado (V)

Recordando ecuaciones flujo DC es posible determinar la forma de los  $f_i(\vec{x}) = h_{i1}x_1 + \dots + h_{iN_s}x_{N_s}$

$$M_{ij} = \frac{\theta_i - \theta_j}{j\omega L_{ij}} \Rightarrow \begin{cases} M_{12} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{0.2} = 5\theta_1 - 5\theta_2 \\ M_{13} = \frac{\theta_1 - \theta_3}{0.4} = 2.5\theta_1 \\ M_{23} = \frac{\theta_3 - \theta_2}{0.25} = -4\theta_2 \end{cases} \Rightarrow [H] = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2.5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Resumiendo hasta ahora:

$$[R] = \begin{bmatrix} 10^{-4} & & \\ & 10^{-6} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \theta_1^{est} \\ \theta_2^{est} \end{bmatrix} \quad \vec{z}^{med} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.06 \\ 0.37 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2.5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$



## Estimadores de estado (VI)

### •Resumen de resultados obtenidos:

$$\vec{X}^{est} = \begin{bmatrix} \theta_1^{est} \\ \theta_2^{est} \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2.5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \vec{Z}^{med} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.06 \\ 0.37 \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} 10^{-4} & & \\ & 10^{-6} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix}$$

En la ecuación 4.3:

$$\vec{X}^{est} = \left[ [H]^T [R^{-1}] [H] \right]^{-1} [H]^T [R^{-1}] \vec{Z}^{med}$$

$$\vec{X}^{est} = \begin{bmatrix} 5.0 & 2.5 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-4} & & \\ & 10^{-6} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2.5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5.0 & 2.5 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-4} & & \\ & 10^{-6} & \\ & & 10^{-4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.06 \\ 0.37 \end{bmatrix}$$

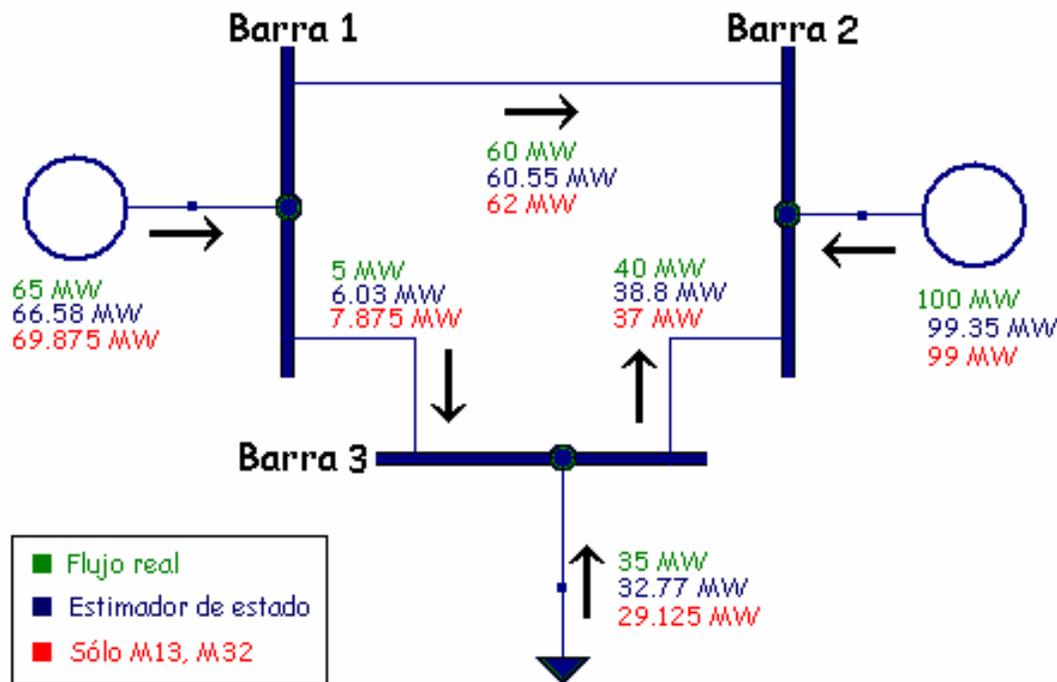
$$\vec{X}^{est} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.024115 \\ -0.097003 \end{bmatrix}$$



## Estimadores de estado (VII)

### • Comparación de resultados

Una vez obtenidos los ángulos para cada una de las barras es posible determinar la totalidad de los flujos de potencia del sistema.



La figura muestra el flujo real, el obtenido mediante el estimador de estado, y el flujo que se obtiene al considerar sólo las mediciones M13 y M32.

Se comprueba que el estimador entrega resultados más cercanos a los que se obtienen mediante métodos no estadísticos.