Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Sistemas de Telecomunicaciones EL55a.

Capítulo 9.

“ Teoría de Tráfico” .

Profesor: Néstor Becerra Yoma

Temario del Capítulo.

9. Teoría de Tráfico.

Introducción

Teoría de Tráfico en Conmutación de Circuitos.

Conceptos a Manejar.

9.1 Procesos de Poisson

9.2 Erlang B

9.3 Erlang C

Introducción.

Fundamentos

- Como cualquier otro servicio público, un sistema de telecomunicaciones tiene que proveer para una demanda fluctuante que solo se puede predecir con un grado limitado de exactitud.

- La naturaleza del servicio requiere un alto estándar de rendimiento. Desde el punto de vista del usuario, la gran mayoría de las demandas deben ser satisfechas con poco ó ningún retraso, de lo contrario considerará un servicio inaceptable.

- Al mismo tiempo, los equipos de transmisión y conmutación son caros y deben ser eficientemente utilizados. Un sobre-dimensionamiento de la central desmeritarán en las ganancias y un subdimensionamiento dará un servicio pobre.

- La optimización de la estructura de la red y la provisión de equipo son por lo tanto uno de los aspectos mas importantes en la ingeniería de las telecomunicaciones.

Introducción.

- Herramienta de análisis del comportamiento de las redes de comunicaciones.
- Conmutación de circuitos. Redes de Telefonía Tradicional (PSTN).
- Telefonía Celular.

Teoría de Tráfico en Conmutación de Circuitos.

- Establecimiento de un canal dedicado físico (real), de extremo a extremo.
- Elementos de conmutación en la red telefónica.
  - Centrales públicas (CO – *Central Office*)
  - PBX (Private Branch eXchange), para el caso de empresas.
- Los enlaces pueden consistir en:
  - Ranuras de tiempo en un sistema de multiplexación temporal (TDM).
  - Bandas de frecuencia para el caso de multiplexación en frecuencia (FDM).

Conceptos a Manejar.

- **Tráfico**.- Se define como el producto del número de llamadas y su duración promedio durante un periodo de observación dado. Es decir,

$$A = \lambda H$$

donde A= Intensidad o Flujo de tráfico

λ = No. de llamadas originadas por unidad de tiempo

H = Tiempo promedio de llamada

Conceptos a Manejar.

- **Erlang** .-A la unidad internacional de tráfico telefónico se le denomina Erlang en reconocimiento al matemático danés A. K. Erlang, fundador de la teoría de tráfico telefónico.

- La intensidad de tráfico expresada en Erlang corresponde al porcentaje de uso de un canal por unidad de tiempo.

Conceptos a Manejar.

- **Grado de servicio.-** El término grado de servicio define la proporción de las llamadas que se permite fallar o bloquear durante la hora de mayor ocupación debido a la limitación, por razones económicas, del equipo de conmutación de las plantas o del número de canales. En una oficina central con varias etapas de conmutación, existen grados de servio para cada una de las etapas. El grado de servicio total es aproximadamente igual a la suma de los grados de servicio parciales.

Grado de servicio = (número de llamadas perdidas) / (número total de llamadas generadas)

Conceptos a Manejar.

Modelos de Llegadas.

- Las redes telefónicas pueden operar en base a bloqueo de llamadas o a la utilización de colas de espera.
- El modelamiento para este tipo de comportamiento se realiza con teorías de cola.
- La notación de Kendall para un sistema general de formación de colas es de la forma:

A / B / C:

A: Representa la distribución de llegada de requerimientos (eg, llamadas) en un conmutador
B: Representa la distribución de servicio en un elemento conmutador (eg, duración de llamada)
C: Es el número de troncales o canales de salida para el caso de una central telefónica o celda en telefonía móvil.

Conceptos a Manejar.

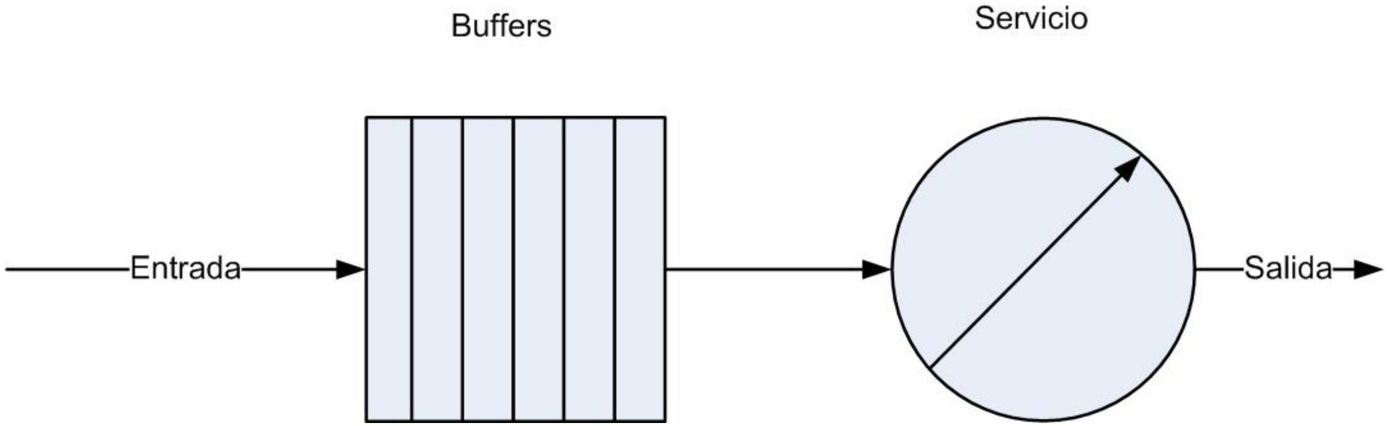
Modelos de Llegadas M/M/C

- Modelo donde tanto los procesos de llegada como los de servicio son Poissonianos o exponenciales (M, Markov), y se tienen C canales.

Conceptos a Manejar.

Modelo de llegada y servicio de eventos.

La siguiente figura ilustra las colas físicas en los sistemas y la relación entre los servicios y los buffers en M/M/1



9.1 Procesos de Poisson.

Se usan tres enunciados básicos:

Sea Δt un intervalo de tiempo, entonces se tiene:

1. La probabilidad de una llegada en el intervalo Δt se define como $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$, $\lambda\Delta t << 1$, siendo λ una constante de proporcionalidad especificada y $O(\Delta t)$ los términos de orden superior.

2. La probabilidad de cero llegadas en Δt es:

$$1- \lambda\Delta t + O(\Delta t).$$

3. Las llegadas o ocurrencia de eventos son procesos sin memoria: cada llegada (evento) en un intervalo de tiempo es independiente de eventos en intervalos previos o futuros.

9.1 Procesos de Poisson.

- El término O(Δ t) denota los elementos $(\lambda\,\Delta t)^n$ con n igual o superior a 2.
- De acuerdo con 1 y 2, la probabilidad de más de un evento en el intervalo Δ t corresponde a O(Δt).
- Sea un intervalo finito T, entonces la probabilidad p(k) de k llegadas en T está dada por:

$$p(k) = \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \qquad k = 0,\ 1,\ 2, 3, \ldots \quad (9.1)$$

9.1 Procesos de Poisson.

A la ecuación (9.1) se le conoce como la distribución de Poisson, en la cual se cumple:

$$E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sigma_k{}^2 = \lambda T \qquad (9.2)$$

9.1 Procesos de Poisson.

Consideraciones.

- Sea t el tiempo entre llegadas sucesivas, siendo esta una variable aleatoria. En la estadística de Poisson, t es una variable aleatoria con distribución exponencial, es decir su función densidad de probabilidad $f_\tau(\tau)$ está dada por:

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \qquad (9.3)$$

9.1 Procesos de Poisson.

Existen dos clases principales de sistemas de entroncamiento:

1. **Bloqueo o borrado de llamada pérdida** (*Lost Call Cleared o LCC)* sin cola de espera.

2. **Retraso de llamada pérdida** *(Lost Call Delayed o LCD)* con cola de espera.

9.1 Procesos de Poisson.

Borrado de llamada pérdida (*Lost Call Cleared o LCC*), sin cola de espera.

- Cuando un usuario requiere servicio, existe un tiempo mínimo de configuración, después del cual se le es otorgado el acceso a un canal si este esta disponible.

- En la eventualidad de no existir canal disponible, la llamada es interrumpida sin acceso al sistema, teniendo el usuario la oportunidad de volver a intentar después de un tiempo.

- Se asume que las llamadas llegan con una distribución de Poisson.

- Existe un número casi infinito de usuarios.

9.1 Procesos de Poisson.

Borrado de llamada pérdida (*Lost Call Cleared o LCC*), sin cola de espera.

- La formula de Erlang B describe el grado de servicio (GOS) como la probabilidad que un usuario arbitrario experimente bloqueo a la solicitud de realizar una llamada.

- Se asume que todas las llamadas bloqueadas son retornadas instantáneamente a un recipiente de usuarios infinito, y que cada usuario puede volver a llamar en cualquier momento.

- El tiempo entre llamadas sucesivas para un usuario bloqueado es un proceso aleatorio y es asumido con distribución de Poisson o fdp exponencial.

9.1 Procesos de Poisson.

Retraso de llamada pérdida *(Lost Call Delayed o LCD)*, con cola de espera.

- Se utilizan colas para mantener en espera las llamadas inicialmente bloqueadas.

- Si un usuario llama y los canales se encuentran ocupados, su requerimiento es retrasado hasta que un canal se desocupe. La probabilidad de que un canal no este inmediatamente disponible en un sistema LCD esta determinada por la fórmula Erlang C.

9.1 Procesos de Poisson.

Retraso de llamada pérdida *(Lost Call Delayed o LCD)*, con cola de espera.

- En LCD el GOS es medido por la probabilidad que la llamada sea retrasada en un tiempo mayor que t segundos.
- Se asume que existe un número infinito de usuarios
- Todas las llamadas en la cola son eventualmente servidas.

9.2 Erlang B.

La formula de Erlang B determina la probabilidad que una llamada sea bloqueada (LCC)

Supuestos:

- Todos los usuarios, incluso los bloqueados, pueden pedir un canal en cualquier momento (sin memoria).
- Todos los canales libres están disponibles para entregar servicio hasta que todos sean ocupados.
- La probabilidad de utilización de un canal (tiempo de servicio) está exponecialmente distribuido. Es decir, las llamadas largas tienen menos probabilidad de ocurrencia.
- Hay un número finito de canales disponibles.

9.2 Erlang B.

La formula de Erlang B determina la probabilidad que una llamada sea bloqueada (LCC)

Supuestos:

- La petición de tráfico esta descrita por una distribución de Poisson, lo cual implica un arribo de llamadas en intervalos de tiempo exponenciales.

- Los intervalos de llegada de peticiones de llamada son independientes unas de otras.

- El número de canales ocupados es igual al número de usuarios realizando una llamada telefónica.

9.2 Erlang B.

Definiendo:

- C : canales
- U : usuarios
- λ : número medio de llegada de llamadas por unidad de tiempo (tasa de llegada)
- H : duración promedio de una llamada
- A : tráfico total ofrecido por el sistema
- A_U: tráfico promedio ofrecido para cada usuario
- λ_1: tasa promedio de generación de llamadas por cada usuario

Entonces $A_U = \lambda_1 H \Rightarrow A = U\,A_U = \lambda\,H$.

9.2 Erlang B.

La probabilidad que una petición de canal de un usuario sea bloqueada esta dada por:

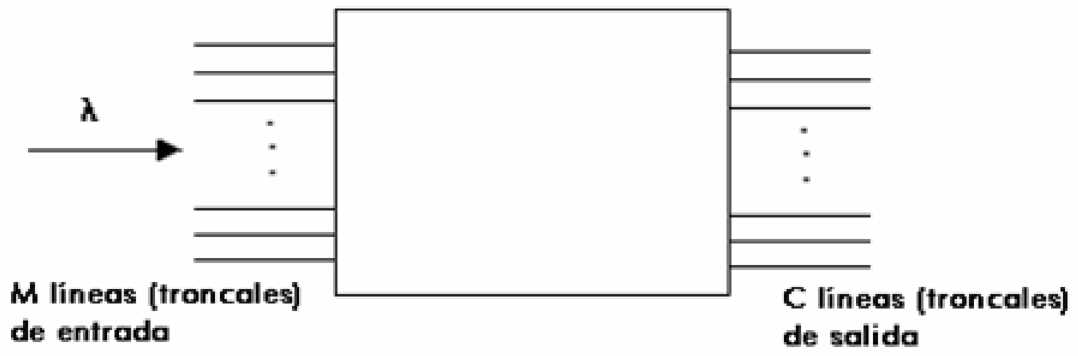


Figura 9.1: Modelo genérico de central de conmutación

$$\Pr\left[Bloqueo\right] = \Pr\left[Ninguno\ de\ los\ C\ canales\ este\ libre\right] \tag{9.4}$$

9.2 Erlang B.

- Como las llamadas llegan de acuerdo a una distribución de Poisson se tiene:

$$\Pr\{\, a(t+\tau) - a(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda\tau}}{n!}(\lambda\tau)^n \quad para \quad n = 0,1,2,.... \qquad (9.5)$$

  Donde a(t) es el número de llegadas o eventos que han ocurrido desde t=0, y t es el intervalo de tiempo entre dos eventos sucesivos. Como ya se discutió, la fdp del tiempo entre llegada de eventos es exponencial).

- La probabilidad que el tiempo de llegada sea menor que un tiempo s esta dada por:

$$\Pr(\tau_n \le s) = 1 - e^{-\lambda s} \qquad (9.6)$$

9.2 Erlang B.

- ***El tiempo de servicio*** es la duración de una llamada en particular que ha sido atendida exitosamente en el sistema.
- El tiempo de servicio se asume exponencial con duración de llamada promedio H, con lo que

$$\mu = 1 / H$$

es la ***tasa de servicio media*** (número de llamadas terminadas por unidad de tiempo).

9.2 Erlang B.

- La probabilidad que el tiempo de servicio del n-ésimo usuario sea menor que algún tiempo de duración s esta dada por:

$$\Pr\{S_n < s\} = 1 - e^{-\mu s} \quad s > 0 \qquad (9.7)$$

- Donde la función densidad de probabilidad de tiempo de servicio es:

$$p(S_n) = \mu e^{-\mu s_n} \qquad (9.8)$$

S_n es el tiempo de servicio del n-ésimo usuario.

9.2 Erlang B.

Demostración de Erlang B.

- Necesario utilizar propiedades de las cadenas de Markov.
- Consideremos un proceso estocástico de tiempo discreto.
- Toma valores desde un conjunto de enteros no negativos, tal que los posibles estados del proceso son i = 0, 1, 2,......C-1, C.
- En otras palabras, cada estado de la cadena de Markov corresponde al número de troncales de salidas siendo utilizados.
- El proceso es una cadena de Markov si la transición desde el estado presente i al estado próximo i+1 depende solo del estado i y no de estados previos.
- La operación de sistemas de entroncamiento es de tiempo continuo, pero puede ser analizado en pequeños intervalos δ, donde $\delta > 0$.

9.2 Erlang B.

- Si N_k es el número de llamadas (canales ocupados) en el instante Kδ, entonces N_k puede ser representado como:

$$N_k = N(k\delta) \qquad (9.9)$$

- La probabilidad de transición está dada por:

$$P_{i,j} = \Pr\{N_{k+1} = j \mid N_k = i\} \qquad (9.10)$$

9.2 Erlang B.

- Usando el enunciado básico número 2 de procesos de Poisson y permitiendo que $\delta \to 0$, se tiene:

$$P_{00} = 1 - \lambda\delta + O(\delta) \qquad (9.11)$$

$$P_{ii} = 1 - \lambda\delta - i\mu\delta + O(\delta) \quad i \geq 1 \qquad (9.12)$$

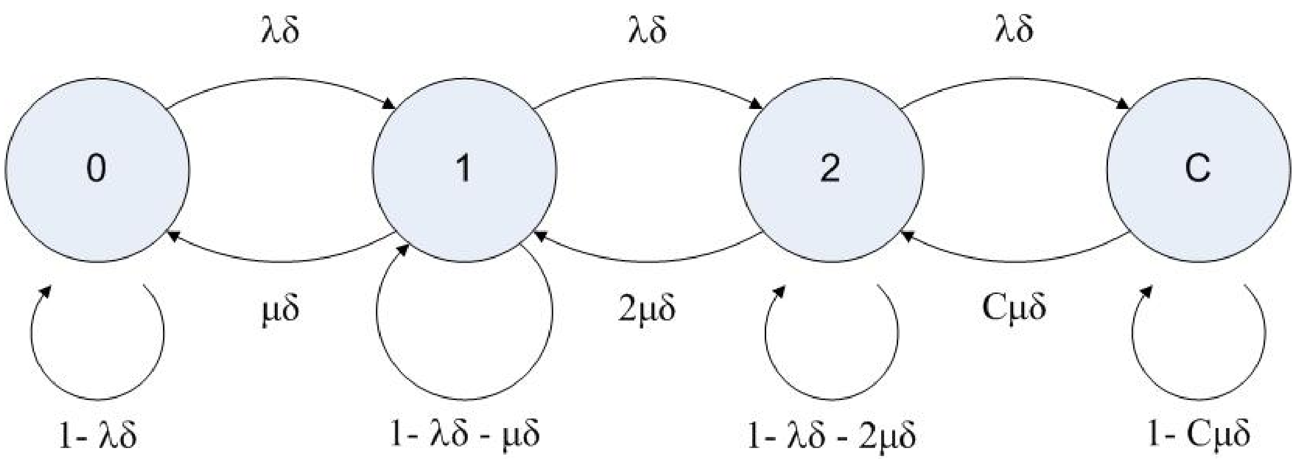
$$P_{i,i+1} = \lambda\delta + O(\delta) \quad i \geq 0 \qquad (9.13)$$

$$P_{i,i-1} = i \cdot \mu \cdot \delta + O(\delta) \quad i \geq 0 \qquad (9.14)$$

$$P_{i,j} = O(\delta) \quad j \neq i,\ j \neq i+1,\ j \neq i-1 \qquad (9.15)$$

9.2 Erlang B.

- Probabilidades de transición representada como una cadena de Markov para Erlang B.



9.2 Erlang B.

- Para entender la cadena supóngase que al comienzo se tienen 0 canales ocupados, es decir no hay usuarios.
- Sobre un pequeño intervalo de tiempo, la probabilidad que el sistema continué sin usuarios es (1 -λδ).
- La probabilidad de que haya un cambio desde 0 a 1 usuario esta dada por λδ. En el otro caso, si hay un canal en uso, la probabilidad de que el sistema pase a 0 canales ocupados esta dada por μδ.
- Similarmente, la probabilidad que el sistema continué con un canal en uso esta dada por 1 - λδ - μδ. Todas las probabilidades de salida para un cierto estado suman 1.
- Sobre un gran período de tiempo, el sistema alcanza el estado de régimen permanente y tiene n canales en uso. Entonces bajo régimen permanente se cumple:

$$\lambda\delta P_{n-1} = n\mu\delta P_n \quad n \le C \qquad (9.16)$$

- La anterior es conocida como la ecuación general de balance.

9.2 Erlang B.

Sabemos

$$\sum_{n=0}^{C} P_n = 1 \qquad (9.17)$$

Usando (9.16)

$$P_1 = \frac{\lambda P_0}{\mu} \qquad (9.18)$$

Evaluando para diversos valores

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad (9.19)$$

Y

$$P_0 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n P_n n! = 1 - \sum_{i=1}^{C} P_i \qquad (9.20)$$

Sustituyendo (9.19) en (9.20)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{C} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} \qquad (9.21)$$

9.2 Erlang B.

- La probabilidad de bloqueo para C canales es:

$$P_c = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^C \frac{1}{C!} \qquad (9.22)$$

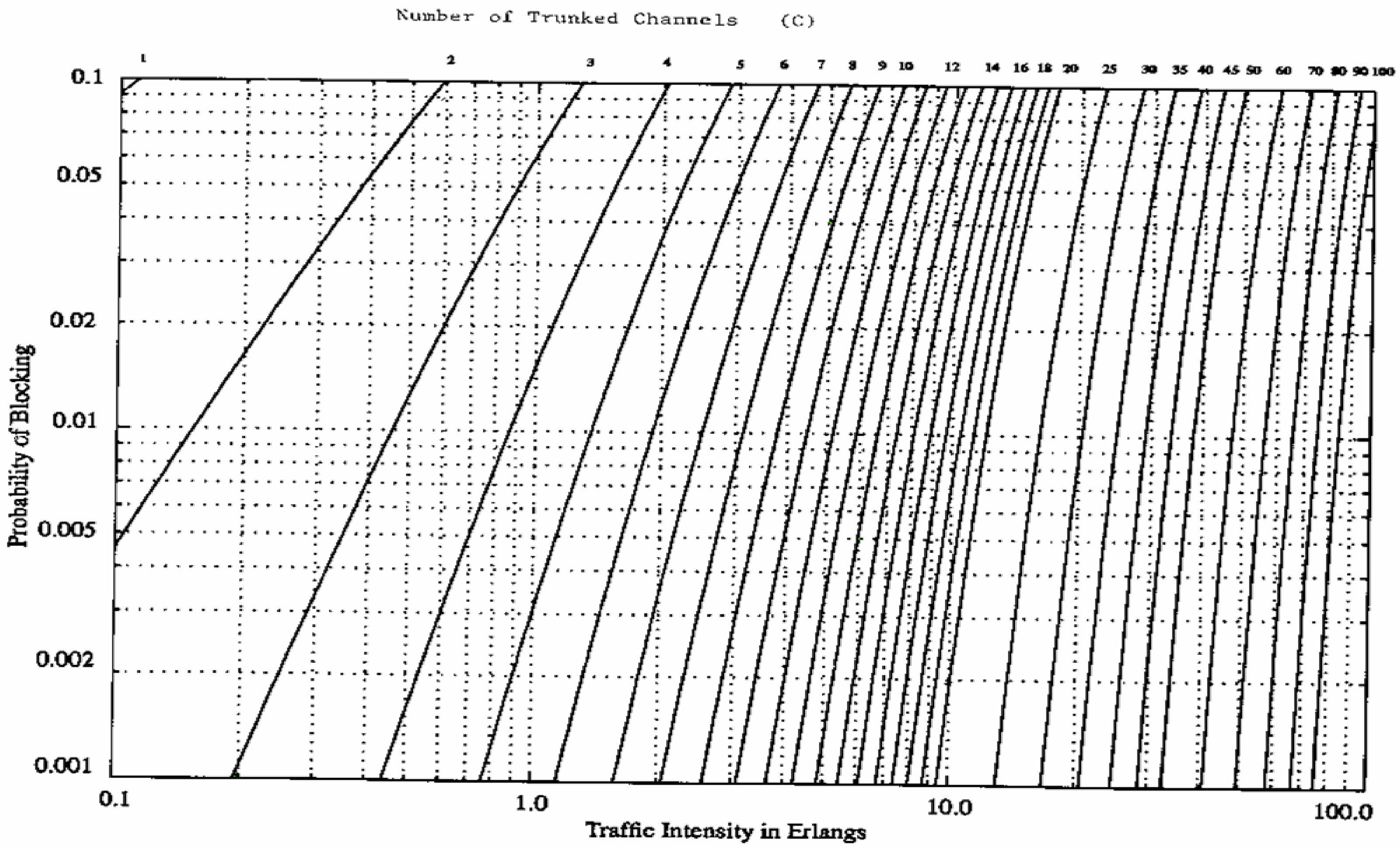
- La fórmula para Erlang B.

$$P_c = \frac{A^C \frac{1}{C!}}{\sum_{n=0}^{C} A^n \frac{1}{n!}} \qquad (9.23)$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

9.2 Erlang B.

Probabilidad de bloqueo como función del número de canales y la intensidad de tráfico en Erlangs.



* Fuente: "*Wireless Communications*", T. Rappaport, Capítulo 2

9.2 Erlang B.

Erlang B Table

Ch	1%	2%	5%
7	2.50	2.94	3.74
8	3.12	3.63	4.54
9	3.78	4.34	5.37
10	4.46	5.08	6.21
11	5.16	5.84	7.07
12	5.87	6.61	7.95
13	6.60	7.40	8.83
14	7.35	8.20	9.72
15	8.10	9.00	10.63
16	8.87	9.82	11.54
17	9.65	10.65	12.46
18	10.43	11.49	13.39
19	11.23	12.33	14.31
20	12.03	13.18	15.25
21	12.83	14.03	16.19
22	13.65	14.90	17.13
23	14.47	15.76	18.08
24	15.29	16.63	19.03
25	16.12	17.50	19.99
26	16.95	18.38	20.94
27	17.97	19.26	21.90
28	18.64	20.15	22.86
29	19.49	21.04	23.83
30	20.34	21.93	24.80
31	21.19	22.83	25.77
32	22.04	23.73	26.75
33	22.90	24.63	27.72
34	23.77	25.53	28.70
35	24.63	26.44	29.68
36	25.51	27.34	30.66
37	26.38	28.25	31.64
38	27.25	29.16	32.62
39	28.13	30.08	33.61
40	29.01	31.00	34.60
41	29.89	31.92	35.58
42	30.77	32.83	36.57
43	31.66	33.76	37.56
44	32.54	34.68	38.56
45	33.43	35.60	39.55
46	34.32	36.53	40.55
47	35.21	37.46	41.54
48	36.11	38.39	42.54
49	37.00	39.32	43.53
50	37.90	40.25	44.53

9.3 Erlang C.

Para definir el sistema retomamos nuevamente el esquema inicial:

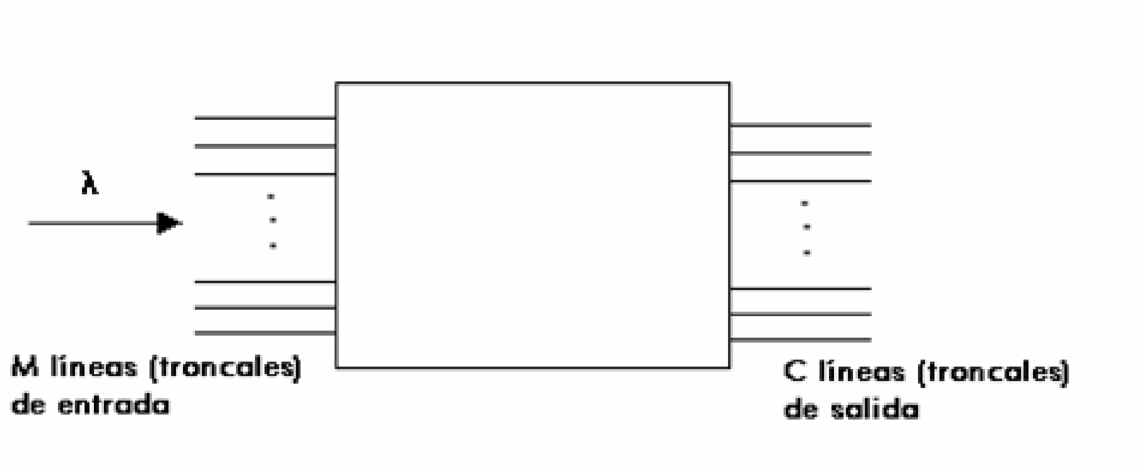


Figura 9.1: Modelo genérico de central de conmutación

- Se procede de manera similar que en la sección anterior.
- Se asume que si a una llamada no se le asocia un canal.
- Las llamadas son puestas en una cola (no es bloqueada),
- La cola tiene un largo infinito.
- Luego las ecuaciones (9.5), (9.6) y (9.8) siguen siendo válidas.

9.3 Erlang C.

- El diagrama de estado para este modelo Erlang C.

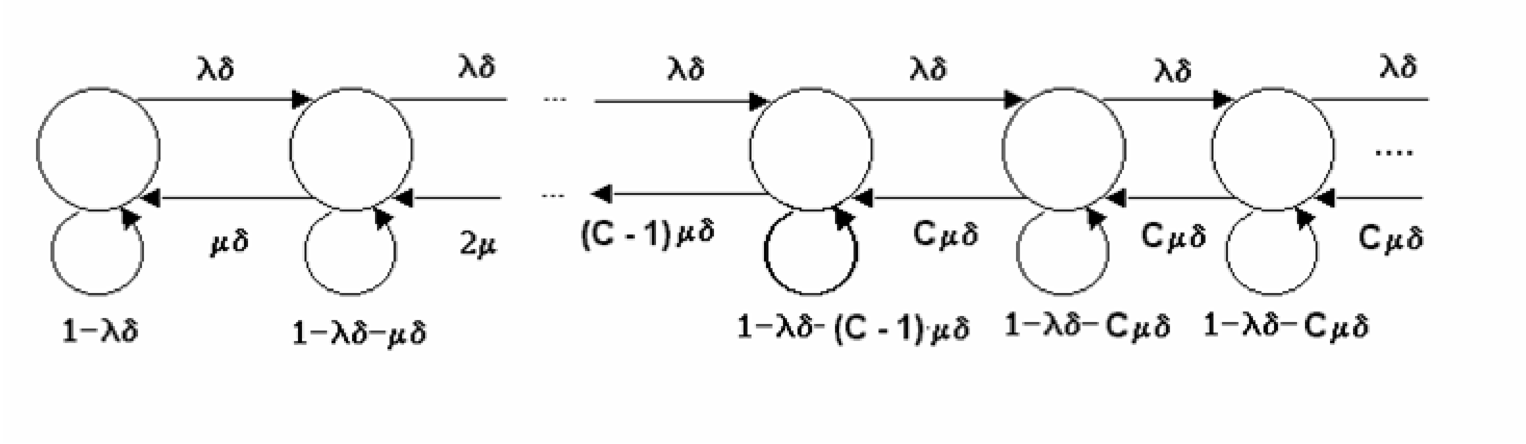


Figura 9.4: Probabilidades de transición como una cadena de Markov

9.3 Erlang C.

*"En **estado permanente**, la probabilidad que el sistema este en estado k y se produzca una transición al estado k - 1 en el próximo intervalo de transición es la misma que la probabilidad que el sistema esté en estado k – 1 y transite hacia el estado k."*

Desde el diagrama 9.4: $\lambda\delta P_{k-1} = k\mu\delta P_k \quad para \quad k \leq C \qquad (9.24)$

Entontonces

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{k}P_{k-1} \quad para \quad k \leq C \qquad (9.25)$$

Y

$$\lambda\delta P_{k-1} = C\mu\delta P_k \quad para \quad k \geq C \qquad (9.26)$$

Entonces

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{C}P_{k-1} \quad para\ k \geq C \qquad (9.27)$$

9.3 Erlang C.

De lo anterior se desprende:

$$P_k = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} P_0 & k \le C \\ \dfrac{1}{C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{C^{k-C}} P_0 & k \ge C \end{cases} \qquad (9.28)$$

Ya que $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ entonces:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{C-1}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^C \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu C}\right)}} \qquad (9.29)$$

9.3 Erlang C.

- *La probabilidad que una llamada llegue cuando todos los C canales estén ocupados y entonces tenga que esperar :*

$$\Pr\left[C\, canales\, esten\, ocupados\right] = \sum_{k=C}^{\infty} P_k = P_0 \frac{1}{C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu C}\right)} \qquad (9.30)$$

9.3 Erlang C.

La cual es válida para $\frac{\lambda}{\mu C} < 1$. Sustituyendo P0 desde

(9.29) y haciendo A=Uλ_1H=λ/μ se obtiene:

$$\Pr\left[C\; canales\;\; esten\; ocupados\;\right] = \frac{A^C}{A^C + C!\left(1 - \frac{A}{C}\right)\sum_{k=0}^{C-1}\frac{A^k}{k!}} \quad (9.31)$$

La cual corresponde a la formula de Erlang C.

9.3 Erlang C.

La probabilidad de llamadas siendo retrasadas como una función del número de canales y la intensidad de tráfico en Erlangs.

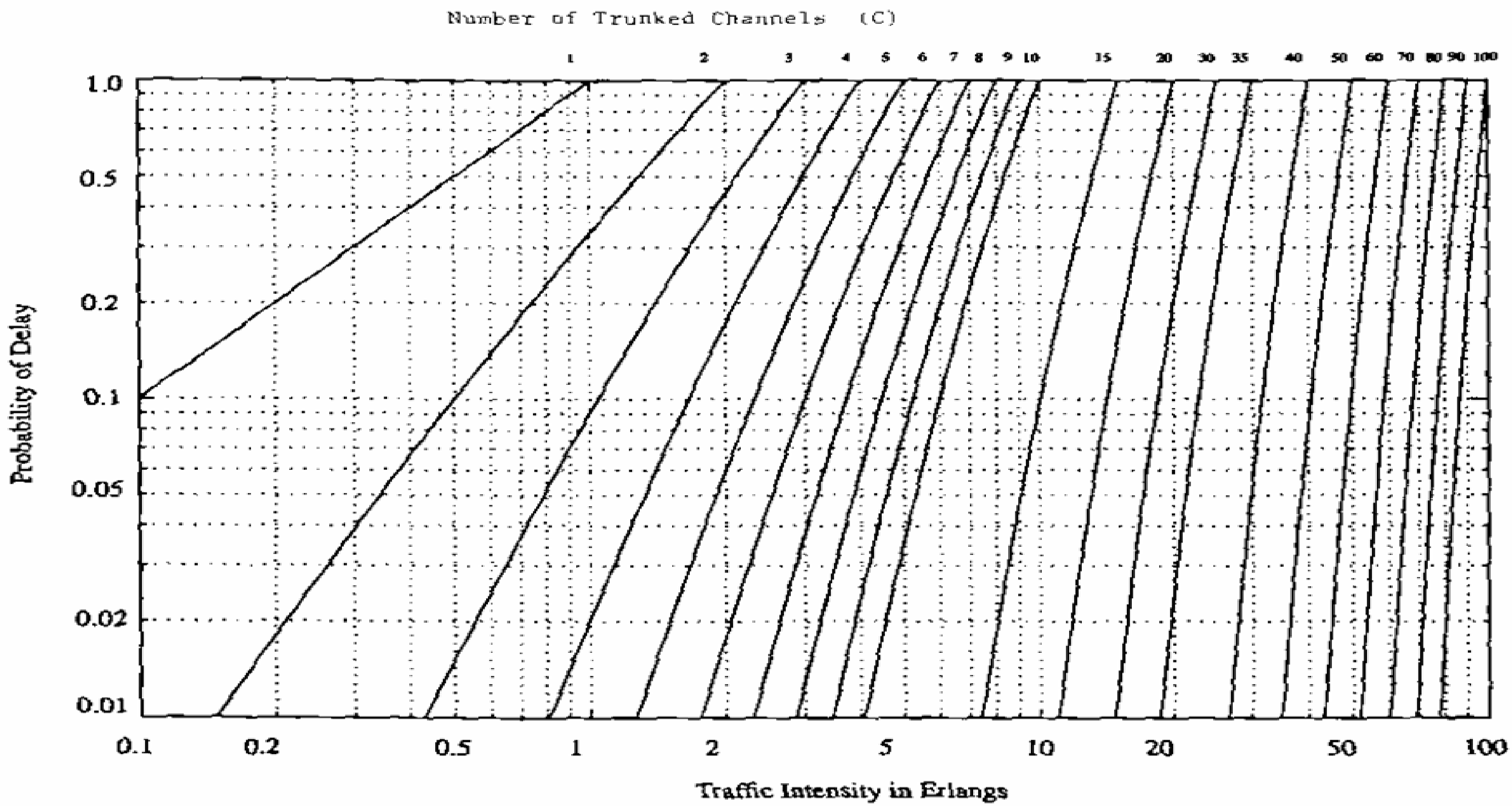


Figura 9.5: Probabilidad que la llamada sea retrasada como una función del número de canales y la intensidad de tráfico en Erlangs.