9 TEORÍA DE TRÁFICO

La teoría de tráfico es una herramienta ampliamente utilizada para el análisis del comportamiento de las redes de comunicaciones, las cuales pueden ser de conmutación de circuitos, como las redes telefónicas, o de conmutación de paquetes como las redes de datos IP. En este capítulo el enfoque irá orientado principalmente a las primeras, ya que son la base en donde se sustenta el sistema telefónico fijo.

La conmutación de circuitos consiste el establecimiento de un canal dedicado físico (real), de extremo a extremo, entre los cuales existen elementos de conmutación, que en el caso de la red telefónica se trata de centrales públicas (CO – *Central Office*) o PBX (Private Branch eXchange), para el caso de empresas. Los enlaces pueden consistir en ranuras de tiempo en un sistema de multiplexación temporal (TDM) o bandas de frecuencia para el caso de multiplexación en frecuencia (FDM).

Como se verá más adelante con mayor detalle, las redes telefónicas pueden operar en base a bloqueo de llamadas o a la utilización de colas de espera, siendo la más utilizada la primera en las redes públicas debido a su equidad y eficacia. El modelamiento para este tipo de comportamiento se realiza con teorías de cola, utilizando distintas notaciones dependiendo de los supuestos y modelos a aplicar para cada proceso. La notación de Kendall para un sistema general de formación de colas es de la forma:

A / B / C:

A representa la distribución de llegada de requerimientos en un conmutador
B repesenta la distribución de servicio en un elemento conmutador
C es el número de troncales de salida para el caso de una central telefónica

A continuación se hará una breve descripción de los procesos de Poisson para luego deducir formulas que servirán para medir el grado de servicio de los sistemas antes descritos.

9.1 Procesos de Poisson

Se utilizan tres enunciados para básicos para definir los procesos de Poisson. Sea Δt un intervalo de tiempo pequeño $(\Delta t \to 0)$, entonces se tiene:

1. La probabilidad de una llegada en el intervalo Δt se define como $\lambda\Delta t + O(\Delta t)$, $\lambda\Delta t \ll 1$, siendo λ una constante de proporcionalidad especificada.
2. La probabilidad de cero llegadas en Δt es $1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)$.
3. Las llegadas son procesos sin memoria: cada llegada (evento) en un intervalo de tiempo es independiente de eventos en intervalos previos o futuros.

El termino O(Δt) denota los elementos $(\Delta t)^n$ con n igual o superior a 2. De acuerdo con 1 y 2, no es posible más de una llegada u ocurrencia de un evento en el intervalo Δt, al menos a O(Δt). Sea un intervalo finito T , entonces la probabilidad p(k) de k llegadas en T está dada por:

$$p(k) = \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{9.1}$$

A (9.1) se le conoce como la distribución de Poisson, en la cual se cumple:

$$E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sigma_k^{\ 2} = \lambda T \tag{9.2}$$

Ahora considerando un intervalo de tiempo mayor, se tendrán una serie de eventos de Poisson, los cuales estarán separados en intervalos. Sea τ el tiempo entre llegadas sucesivas, siendo esta una variable aleatoria. En la estadística de Poisson, τ es una variable aleatoria con distribución exponencial, es decir su función densidad de probabilidad $f_\tau(\tau)$ está dada por

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \tag{9.3}$$

A continuación se describen los sistemas utilizados en teoría de tráfico, sección que se basa principalmente en el texto “*Wireless Communications”*de Theodore S. Rappaport, y específicamente en el apéndice A que trata de Teoría de entroncamiento.

Existen dos clases principales de sistemas de entroncamiento:

- Borrado de llamada pérdida (*Lost Call Cleared o LCC),* sin cola de espera.
- Retraso de llamada pérdida *(Lost Call Delayed o LCD)*, con cola de espera.

En el primer sistema cuando un usuario requiere servicio, existe un tiempo mínimo de configuración, después del cual se le es otorgado el acceso a un canal si este esta disponible. En la eventualidad de no existir canal disponible, la llamada es interrumpida sin acceso al sistema, teniendo el usuario la oportunidad de volver a intentar después de un tiempo. Se asume que las llamadas llegan con una distribución de Poisson, y además que existe un número casi infinito de usuarios. La formula de Erlang B describe el grado de servicio (GOS) como la probabilidad que un usuario arbitrario experimente un bloqueo de llamada en un sistema LCC. Se asume que todas las llamadas bloqueadas son retornadas instantáneamente a un recipiente de usuarios infinito, y que cada usuario puede volver a llamar en cualquier momento. El tiempo entre llamadas sucesivas para un usuario bloqueado es un proceso aleatorio y es asumido con distribución de Poisson.

En el sistema LCD, se utilizan colas para mantener en espera las llamadas inicialmente bloqueadas. Si un usuario llama y los canales se encuentran ocupados, su requerimiento es retrasado hasta que un canal se desocupe. Entonces, dado que un canal no esta disponible inicialmente, es necesario conocer la probabilidad de que una llamada sea retrasada, hasta que un canal este disponible para su uso. La probabilidad de que un canal no este inmediatamente disponible en un sistema LCD esta determinada por la fórmula Erlang C. En LCD el GOS es medido por la probabilidad que la llamada sea retrasada en un tiempo mayor que t segundos. Se asume que existe un número infinito de usuarios, y que todas las llamadas en la cola son eventualmente servidas.

A continuación se describirán las formulas de Erlang B en LCC y Erlang C en LCD, los cuales se basan en modelos de cola M/M/C, que implica proceso de llegada de Poisson, estadísticas de servicio con distribución exponencial y C troncales de salida (la M viene de procesos de Markov).

9.2 Erlang B

La formula de Erlang B determina la probabilidad que una llamada sea bloqueada, para sistemas que no utilizan colas de espera (LCC). Está basada en los siguientes supuestos:

- Todos los usuarios, incluso los bloqueados, pueden pedir un canal en cualquier momento (sin memoria).
- Todos los canales libres están disponibles para entregar servicio hasta que todos sean ocupados.
- La probabilidad de utilización de un canal (tiempo de servicio) está exponecialmente distribuido. Es decir, las llamadas largas tienen menos probabilidad de ocurrencia.
- Hay un número finito de canales disponibles.
- La petición de tráfico esta descrita por una distribución de Poisson, lo cual implica un arribo de llamadas en intervalos de tiempo exponenciales.
- Los intervalos de llegada de peticiones de llamada son independientes unas de otras.
- El número de canales ocupados es igual al número de usuarios ocupados.

Sea un sistema con:
C canales
U usuarios
λ número medio de llegada de llamadas por unidad de tiempo (tasa de llegada)
H duración promedio de una llamada
A tráfico total ofrecido por el sistema
A_U tráfico promedio ofrecido para cada usuario
λ_1 tasa promedio de llegada de llamada de un usuario

entonces $A_U = \lambda_1 H \Rightarrow A = UA_U = \lambda H$.

Esta situación se muestra en la Figura 9.1. La probabilidad que una petición de canal de un usuario sea bloqueada esta dada por:

$$\Pr[Bloqueo] = \Pr[Ninguno\, de\, los\, C\, canales\, este\, libre] \qquad (9.4)$$

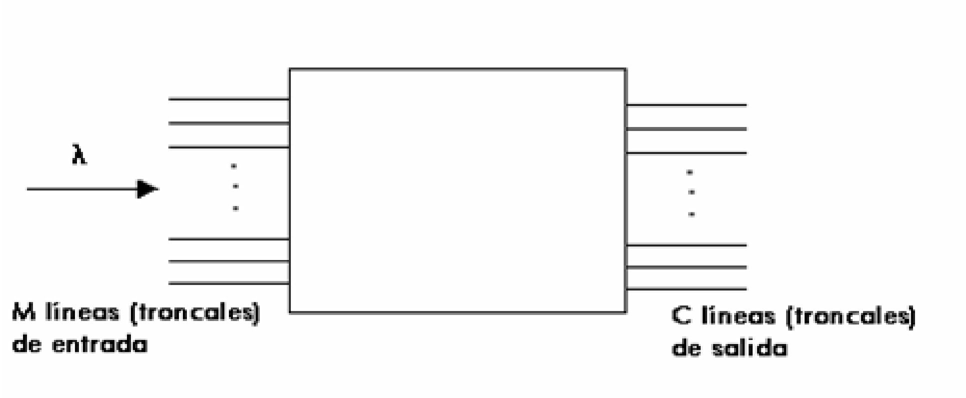

Figura 9.1: Modelo genérico de central de conmutación

Como las llamadas llegan de acuerdo a una distribución de Poisson se tiene

$$\Pr\{a(t+\tau)-a(t)=n\}=\frac{e^{-\lambda\tau}}{n!}(\lambda\tau)^n \quad para \;\; n=0,1,2,.... \tag{9.5}$$

Donde a(t) es el número de llegadas o eventos que han ocurrido desde t=0, y τ es el intervalo de tiempo entre dos eventos sucesivos. Como se vio con anterioridad el tiempo de llegada entre eventos es exponencial del tipo descrito en (9.3). Entonces la probabilidad que el tiempo de llegada sea menor que un tiempo s esta dada por:

$$\Pr(\tau_n \le s)=1-e^{-\lambda s} \tag{9.6}$$

El tiempo de servicio es la duración de una llamada particular que ha sido atendida exitosamente en el sistema. El tiempo de servicio se asume exponencial con duración de llamada promedio H, con lo que $\mu = 1/H$ es la tasa de servicio media (número de llamadas por unidad de tiempo). La probabilidad que el tiempo de servicio del n-ésimo usuario sea menor que algún tiempo de duración s esta dada por:

$$\Pr\{S_n < s\}=1-e^{-\mu s} \quad s>0 \tag{9.7}$$

Donde la función densidad d probabilidad de tiempo de servicio es

$$p(S_n)=\mu e^{-\mu s_n} \tag{9.8}$$

y S_n es el tiempo de servicio del n-ésimo usuario.

Para derivar la formula para Erlang B es necesario utilizar propiedades de las cadenas de Markov. Consideremos un proceso estocástico de tiempo discreto que toma valores desde un conjunto de enteros no negativos, tal que los posibles estados del proceso son i = 0, 1, 2,......C-1, C. En otras palabras, cada estado de la cadena de Markov corresponde al número de troncales de salidas siendo utilizados. El proceso es una cadena de Markov si la transición desde el estado presente i al estado próximo i+1 depende solo del estado i y no de estados previos. La operación de sistemas de entroncamiento es de tiempo continuo, pero puede ser analizado en pequeños intervalos δ $(\delta \to 0)$, donde δ >0. Si N_k es el número de llamadas (canales ocupados) en el instante kδ, entonces N_k puede ser representado como

$$N_k = N(k\delta) \tag{9.9}$$

La probabilidad de transición está dada por

$$P_{i,j} = \Pr\{N_{k+1} = j \mid N_k = i\} \tag{9.10}$$

Usando el enunciado básico número 2 de procesos de Poisson y permitiendo que δ→0, se tiene

$$P_{00} = 1 - \lambda\delta + O(\delta) \tag{9.11}$$

$$P_{ii} = 1 - \lambda\delta - \mu\delta + O(\delta) \quad i \geq 1 \tag{9.12}$$

$$P_{i,i+1} = \lambda\delta + O(\delta) \quad i \geq 0 \tag{9.13}$$

$$P_{i,i-1} = i \cdot \mu \cdot \delta + O(\delta) \quad i \geq 0 \tag{9.14}$$

$$P_{i,j} = O(\delta) \quad j \neq i,\ j \neq i+1,\ j \neq i-1 \tag{9.15}$$

Estas relaciones quedan mejor graficadas en la figura 9.2.

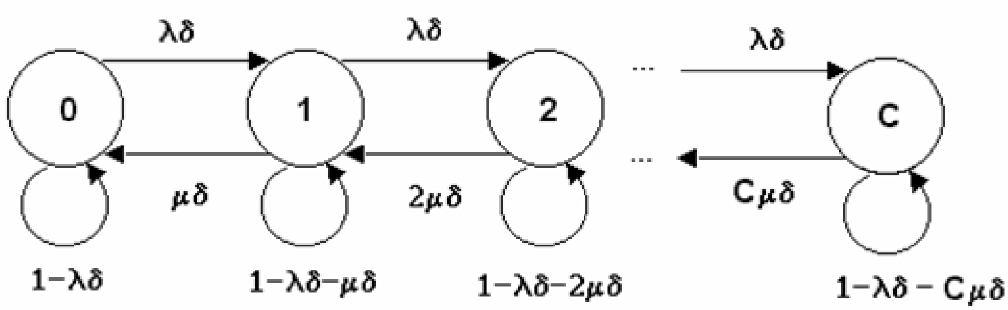

Figura 9.2: Probabilidades de transición representada como una cadena de Markov

Para entender la cadena supongase que al comienzo se tienen 0 canales ocupados, es decir no hay usuarios. Sobre un pequeño intervalo de tiempo, la probabilidad que el sistema continué sin usuarios es (1 - λδ). La probabilidad de que haya un cambio desde 0 a 1 usuario esta dada por λδ. En el otro extremo, si un canal esta en uso, la probabilidad de que el sistema pase a 0 canales ocupados esta dada por μδ. Similarmente, la probabilidad que el sistema continué con un canal en uso esta dada por 1 – λδ – μδ. Todas las probabilidades de salida para un cierto estado suman 1.

Sobre un gran período de tiempo, el sistema alcanza el estado de régimen permanente y tiene n canales en uso. Entonces bajo régimen permanente se cumple

$$\lambda\delta P_{n-1} = n\mu\delta P_n \quad n \le C \tag{9.16}$$

La ecuación (9.16) es conocida como la ecuación general de balance. Además

$$\sum_{n=0}^{C} P_n = 1 \tag{9.17}$$

Ocupando (9.16) se obtiene

$$P_1 = \frac{\lambda P_0}{\mu} \tag{9.18}$$

Evaluando (9.16) para diferentes valores se obtiene

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \tag{9.19}$$

Y

$$P_0 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n P_n n! = 1 - \sum_{i=1}^{C} P_i \tag{9.20}$$

Sustituyendo (9.19) en (9.20)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{C} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} \tag{9.21}$$

En (9.19) la probabilidad de bloqueo para C canales es

$$P_c = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C \frac{1}{C!} \tag{9.22}$$

Sustituyendo (9.21) en (9.22), con A=λH=λ/μ se tiene

$$P_c = \frac{A^C \frac{1}{C!}}{\sum_{n=0}^{C} A^n \frac{1}{n!}} \tag{9.23}$$

La cual representa la formula para Erlang B. En la Figura 9.3 se aprecia las curvas características de probabilidad de bloqueo como función del número de canales e intensidad de tráfico en Erlang.

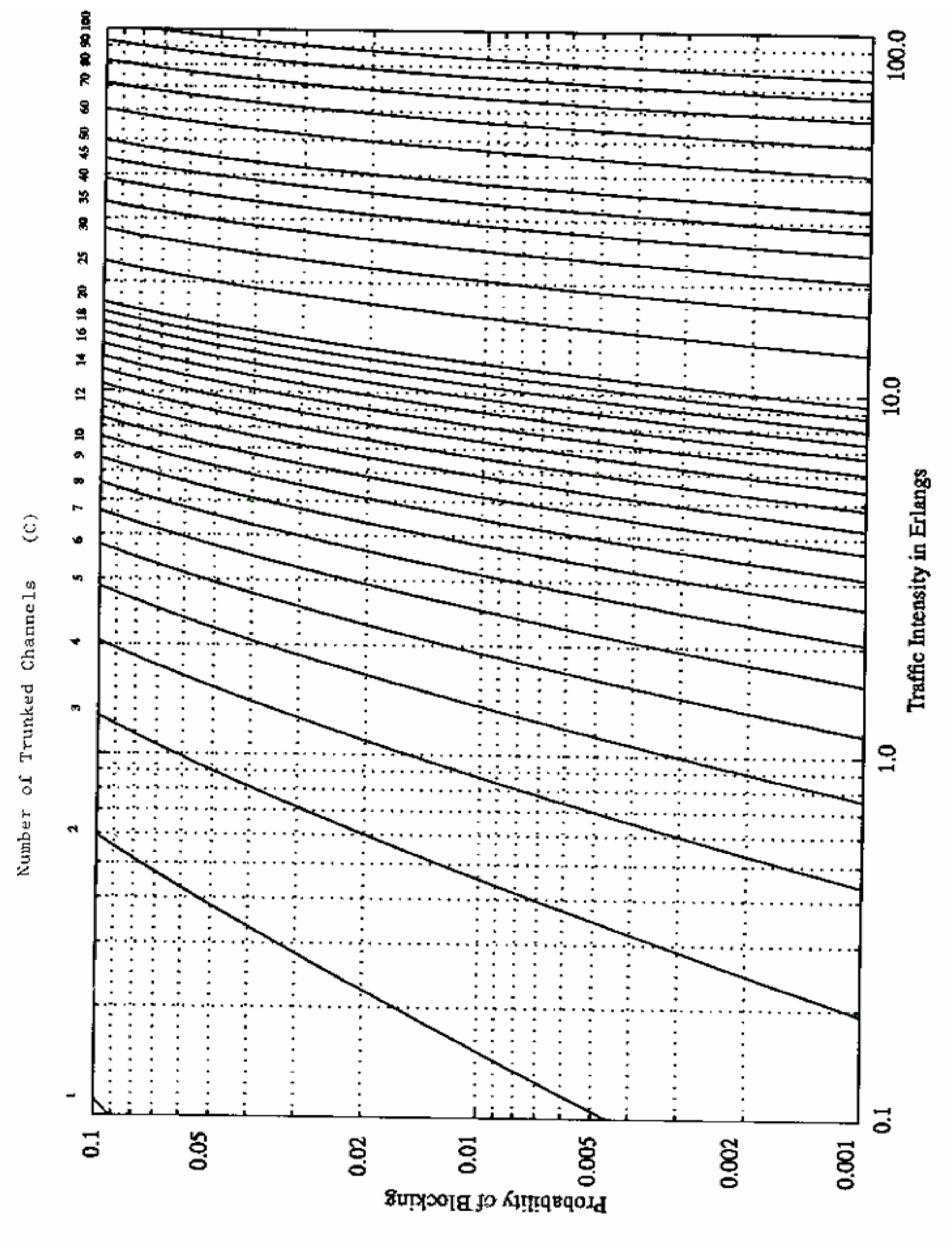

Figura 9.3: Probabilidad de bloqueo como función del número de canales y la intensidad de tráfico en Erlangs. *

* Fuente: "*Wireless Communications*", T. Rappaport, Capítulo 2

9.3Erlang C

Sea un sistema con C números de troncales de salida, como se muestra en la figura 9.1. Para derivar la formula de Erlang C se procede de manera similar que en la sección anterior, excepto que ahora se asume que si a una llamada no se le asocia un canal, esta es puesta en una cola (no es bloqueada), la cual tiene un largo infinito. Luego las ecuaciones (9.5), (9.6) y (9.8) siguen siendo validas.

El diagrama de estado para este modelo se muestra en la Figura 9.4.

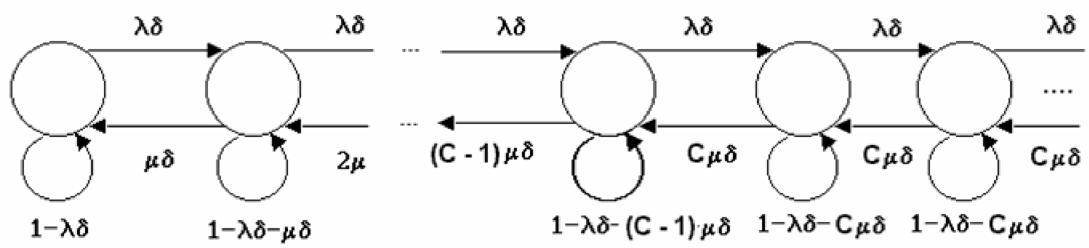

Figura 9.4: Probabilidades de transición como una cadena de Markov

En estado permanente, la probabilidad que el sistema este en estado k y se produzca una transición al estado k - 1 en el próximo intervalo de transición es la misma que la probabilidad que el sistema esté en estado k – 1 y transite hacia el estado k. Entonces desde el diagrama de estado de la figura 9.4

$$\lambda\delta P_{k-1} = k\mu\delta P_k \quad para\ k \le C \tag{9.24}$$

entonces

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{k}P_{k-1} \quad para\ \ k \le C \tag{9.25}$$

y

$$\lambda\delta P_{k-1} = C\mu\delta P_k \quad para\ \ k \ge C \tag{9.26}$$

entonces

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{C}P_{k-1} \quad para\ k \ge C \tag{9.27}$$

de lo cual se puede desprender que

$$P_k = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!}P_0 & k \le C \\ \dfrac{1}{C!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{C^{k-C}}P_0 & k \ge C \end{cases} \tag{9.28}$$

Ya que $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ entonces

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{C-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu C}\right)}} \tag{9.29}$$

La probabilidad que una llamada llegue cuando todos los C canales estén ocupados y entonces tenga que esperar puede ser determinada usando la ecuación (9.28)

$$\Pr[C\, canales\, esten\, ocupados] = \sum_{k=C}^{\infty} P_k = P_0 \frac{1}{C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu C}\right)} \tag{9.30}$$

La cual es válida para $\frac{\lambda}{\mu C} < 1$. Sustituyendo P_0 desde (9.29) y haciendo A=Uλ_1H=λ/μ se obtiene:

$$\Pr[C\, canales\, esten\, ocupados] = \frac{A^C}{A^C + C!\left(1-\frac{A}{C}\right)\sum_{k=0}^{C-1}\frac{A^k}{k!}} \tag{9.31}$$

La cual corresponde a la formula de Erlang C.

En la el gráfico de la Figura 9.5 se muestra la probabilidad de llamadas siendo retrasadas como una función del número de canales y la intensidad de tráfico en Erlangs.

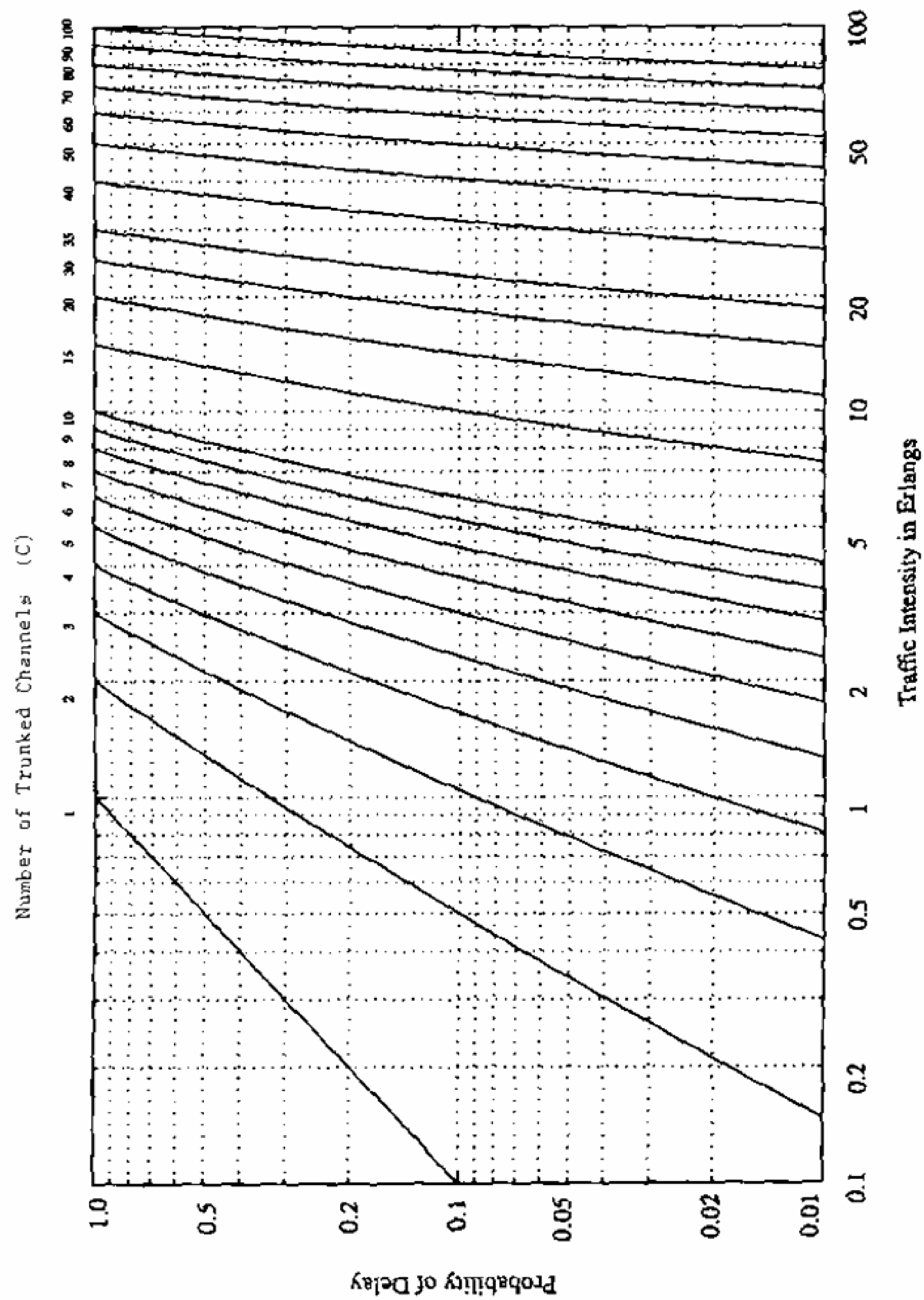

Figura 9.5: Probabilidad que la llamada sea retrasada como una función del número de canales y la intensidad de tráfico en Erlangs. *

* Fuente: "*Wireless Communications*", T. Rappaport, Capítulo 2