Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica
EL32D – Análisis y Modelación de Sistemas Dinámicos

Resumen nº 1 Modelos para procesos
Profesor Héctor Augusto
Profesor Auxiliar Joshua Carvacho

Resumen
El objetivo de la modelación es obtener modelos matemáticos manejables y generales que sirvan como buenas aproximaciones de procesos reales.

La obtención de un modelo para un sistema determinado puede realizarse de muchas formas, según el tipo de análisis que se desee realizar. Entre los distintos métodos de modelación destacan por su generalidad y simpleza el método de conservación, el principio de mínima acción y el desarrollo de ecuaciones de movimiento.

1. Principio de conservación: en muchos procesos, existe alguna variable de rigor que se conserva, por ejemplo la energía, la masa, la cantidad de movimiento, la carga eléctrica, etc. Esta constancia da lugar a ecuaciones de balance en un cierto instante y lugar del espacio. La forma general de las ecuaciones de balance dentro de un sistema:

$$(Acumulación\ de\ X) = (Entrada\ neta\ de\ X) + (Generación\ neta\ de\ X)$$

La entrada neta corresponde a
$$(Entrada\ neta\ de\ X) = (Entrada\ de\ X - Salida\ de\ X)$$

Y la generación neta corresponde a
$$(Generación\ neta\ de\ X) = (Generación\ de\ X) - (Desaparición\ de\ X)$$

A partir de esto se definen los términos:
F(t): Flujo neto de entrada de X al sistema
G(t): Velocidad de generación de X en el sistema
Δt: Intervalo en el que se considera acumulación

Luego, la acumulación, entrada y generación de X en el sistema quedan determinadas por las expresiones:

Acumulación de X: $X(t+\Delta t) - X(t) = F(t)\Delta t + G(t)\Delta t$
Entrada neta de X: $F(t)\Delta t$
Generación neta de X: $G(t)\Delta t$

Dado que la acumulación de X es igual a la entrada neta de X más la generación de X, entonces el balance para X queda descrito por la ecuación:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = F(t)\Delta t + G(t)\Delta t$$

Dividiendo por Δt y haciéndolo tender a cero:

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t) + G(t)$$

2. <u>Principio de mínima acción</u>: el principio de mínima acción (Hamilton) postula que para un sistema conservativo se cumple:

$$\partial\left(\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt \right) = 0$$

Siendo L el lagrangiano del sistema definido mediante: L=T-V, donde T es la energía cinética del sistema y V es la energía potencial del sistema; a su vez x es un vector de coordenadas generalizadas dependiente del tiempo. Dicha condición establece que la acción del sistema (definida como la integral del Lagrangiano en una trayectoria dada) debe ser mínima (variación igual a cero es una condición necesaria de mínimo).

Una consecuencia directa del principio de Hamilton son las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) + F_i = 0$$

Donde F_i son las fuerzas generalizadas. Para el caso de sistema conservativo, estas ecuaciones se traducen en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

3. <u>Desarrollo de ecuaciones de movimiento</u>: explicación física de muchos fenómenos. Se presenta como ejemplo en este resumen porque esto tiene que ver con muchos cursos previos (mecánica, sistemas dinámicos, física estadística, etc)