

DINAMICA LAGRANGIANA**Manuel A. Duarte Mermoud**Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Casilla 412-3, Santiago
CHILE**Resumen:** En este capítulo se analiza el tema de la dinámica Lagrangiana aplicada al proceso de obtención de modelos de sistemas dinámicos, tanto mecánicos como de otra naturaleza.**1. INTRODUCCION**

Las leyes básicas de la dinámica pueden ser expresadas matemáticamente de varias maneras equivalentes a la forma dada por Newton. Una de ellas son las ecuaciones de Lagrange, las cuales pueden ser deducidas a partir de las leyes de Newton y el principio del trabajo virtual.

El método de Lagrange reduce en gran parte todo el campo de la estática, de la dinámica de partículas y la dinámica de cuerpos rígidos a un solo procedimiento que implica las mismas etapas básicas, reemplazando así a todos los métodos particulares. Este método resulta especialmente poderoso cuando se desea modelar sistemas complejos, ya que es una forma sistemática y general para determinar las ecuaciones de estado.

El procedimiento Lagrangiano está basado en gran parte en magnitudes escalares: energía cinética, energía potencial, trabajo virtual y en muchos casos, la función de potencia. Todas ellas tienen la ventaja de ser fácilmente expresables en cualquier sistema de coordenadas adecuado. Además, las ecuaciones de Lagrange basadas en las anteriores magnitudes escalares tienen en cuenta en forma completa y automática las magnitudes vectoriales como fuerza, aceleración, velocidad, etc., sin necesidad de recurrir a métodos vectoriales formales.

Por último, el método de Lagrange es aplicable a otros campos diferentes de la dinámica, resultando ser especialmente útil en el estudio de los sistemas electromecánicos.

1.1 Ideas y Conceptos Relacionados

En el estudio de un sistema dinámico lo primero que debemos conocer es su configuración, es decir, de que partes esta compuesto, las relaciones que existen entre estas partes y los grados de libertad que tiene el sistema. Recordemos que los grados de libertad se definen como el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para especificar la posición de todas y cada una de las partículas y elementos componentes del sistema.

Para conocer la posición de cada una de las partes de nuestro sistema respecto a alguna referencia recurrimos a algún conjunto de coordenadas. Sin embargo, como las ecuaciones de Lagrange son válidas para cualquier tipo de coordenadas, no estamos obligados a remitir nuestro estudio a ningún sistema coordenado específico; por lo tanto, expresaremos todas las ecuaciones importantes en función de coordenadas generalizadas. Las coordenadas generalizadas son un conjunto de p

magnitudes cualesquiera, que definen completamente la posición del sistema bajo estudio.

Es importante notar que no importa cual sea la naturaleza de estas magnitudes. Para resaltar este hecho al conjunto se le designa por la letra q , y a cada coordenada en particular se le asocia un subíndice. Así $q_1, q_2, \dots, q_p$ son las coordenadas generalizadas del sistema en cuestión. Además, al conjunto de velocidades generalizadas, conformado por las tasas de variación de cada coordenada q , se le designa por $\dot{q}$.

En varias ocasiones necesitaremos trasladarnos de un sistema de coordenadas generalizadas a algún sistema coordenado convencional y viceversa, para lo cual disponemos de las ecuaciones de transformación. Estas ecuaciones dan cuenta de las relaciones que existen entre los dos sistemas de coordenadas y se notarán de la siguiente manera:

$$x = x(q_1, q_2, \dots, q_p), \text{ o bien, } x = x(q)$$

$$y = y(q_1, q_2, \dots, q_p), \text{ o bien, } y = y(q)$$

$$z = z(q_1, q_2, \dots, q_p), \text{ o bien, } z = z(q)$$

resaltando de esta forma que las coordenadas convencionales que usamos en nuestras ecuaciones estarán en función de coordenadas generalizadas. Por otro lado, se debe tener en cuenta que al momento de elegir coordenadas generalizadas solo debe importarnos que nos faciliten la resolución del problema, por lo cual, puede darse el caso de que no todas las p coordenadas elegidas sean independientes y que solo n de ellas sí lo sean, luego, las $(p - n)$ coordenadas dependientes reciben el nombre de coordenadas superfluas y deben ser eliminadas de las ecuaciones de transformación utilizando las llamadas ecuaciones de restricción:

$$q_{n+1} = q_{n+1}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$q_{n+2} = q_{n+2}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\vdots$$

$$q_p = q_p(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

las que nos conducen a obtener ecuaciones de transformación reducidas

$$x = x(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$y = y(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$z = z(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Es importante destacar que para que la transformación de coordenadas sea posible, ésta debe ser continuamente diferenciable, con n grados de libertad.

2. PRINCIPIO DE MINIMA ACCION

Este principio es considerado como la formulación más general de la Ley del Movimiento de los sistemas dinámicos. Según este principio, todo sistema está caracterizado por una función $L(q, \dot{q})$, denominada Lagrangiano del sistema, y por su integral S

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

que se conoce como la acción.

El Principio de Mínima Acción establece que la trayectoria que siga el sistema durante su evolución entre dos posiciones (o estados) $(q(t_1), \dot{q}(t_1))$ y $(q(t_2), \dot{q}(t_2))$ cumplirá la condición de acción mínima.

El cálculo variacional nos indica que la condición de mínimo (en forma general, de extremo) de S se cumplirá si para la trayectoria correcta su primera variación (o simplemente variación) es nula, es decir $\delta S = 0$. Tal como se puede ver en el apéndice, para resolver el problema de minimizar una integral dada es necesario que la función integrando satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Esto es cierto cuando el sistema tiene un solo grado de libertad. En general, si son n los grados de libertad, y como las funciones $q_i(t)$ deben variar independientemente, obtendremos n ecuaciones de la forma recién presentada. Estas ecuaciones diferenciales reciben el nombre de Ecuaciones de Lagrange (en el cálculo variacional se les conoce como Ecuaciones de Euler) y son las que determinan el comportamiento dinámico del sistema.

2.1 Ecuaciones de Lagrange para una Partícula

Como ya lo indicamos anteriormente, cualquiera de las varias maneras de formular las leyes fundamentales de la dinámica puede tomarse como base para la deducción de las ecuaciones de Lagrange. Nosotros partiremos de las leyes del movimiento de Newton, estableceremos la ecuación de D'Alembert y de aquí, finalmente, deduciremos las ecuaciones de Lagrange.

Supongamos que sobre la partícula de masa m (constante) actúa una fuerza resultante F de componentes F_x, F_y, F_z . La ecuación del movimiento de Newton para esta partícula es:

$$F = m\ddot{r}$$

la cual expresada en forma escalar según sus componentes queda:

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z}$$

Consideremos ahora el trabajo virtual δW hecho por F al suponer que la partícula sufre un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$ completamente arbitrario e infinitesimal. Luego:

$$\begin{aligned} \delta W &= F \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \\ &= m(\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) \end{aligned}$$

Sean q_1, q_2, q_3 un conjunto de coordenadas generalizadas, y recordemos que a través de las ecuaciones de transformación podemos expresar los desplazamientos virtuales $\delta \vec{x}, \delta \vec{y}, \delta \vec{z}$ en términos de $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$. Es decir:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \delta q_3 \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} \delta q_3 \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3 \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo estas expresiones en la ecuación del trabajo virtual, y luego de reagrupar términos, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \delta q_k &= \\ = \sum_{k=1}^3 m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \delta q_k \end{aligned}$$

Como el primer miembro de esta ecuación es el trabajo virtual y q_1, q_2, q_3 son coordenadas generalizadas, entonces a los coeficientes que acompañan a $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$, denotados Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente, serán llamados fuerzas generalizadas. Por lo tanto la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 &= \\ = \sum_{i=1}^3 m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \delta q_i \end{aligned}$$

donde

$$Q_j = F_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \quad \text{para } j = 1, 2, 3$$

Como $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ son arbitrarios (algunos pueden ser incluso nulos), entonces la ecuación del trabajo virtual es válida si y solo si se cumple que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \\ Q_2 &= m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) \\ Q_3 &= m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_3} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_3} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_3} \right) \end{aligned}$$

Estas expresiones ya contienen en forma implícita las ecuaciones de Lagrange; para poder llegar a ellas debemos realizar algunas transformaciones de índole puramente matemático, sobre las cuales no debemos tratar de ver ningún sentido físico. Notemos que en

nuestro conjunto de ecuaciones solo intervienen términos de la forma

$$a \frac{\partial a}{\partial q_i} \text{ con } a = x, y, z$$

Las siguientes transformaciones son válidas para las tres coordenadas x, y, z . En primer lugar, recordemos la regla de la cadena, es decir:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3$$

Si ahora derivamos parcialmente esta expresión respecto a alguno de los q_i lograremos la siguiente identidad:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}$$

además, debemos notar que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i}$$

Ahora, sustituiremos estas dos ecuaciones en la siguiente identidad:

$$\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)$$

así, concluiremos que

$$\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right)}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \dot{x}^2}{2} \right)$$

De igual forma podemos obtener expresiones semejantes para cada una de las restantes coordenadas. Por lo tanto, estamos en condiciones de reemplazar estos resultados en nuestro conjunto original de ecuaciones, y reagrupando términos obtenemos lo siguiente:

$$Q_i = m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} \right) \right]$$

En esta ecuación podemos reconocer la presencia de la energía cinética de la partícula libre, ya que:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación anterior, obtendremos la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \text{ con } i = 1, 2, 3$$

Estas son las ecuaciones de Lagrange en su forma más general para una partícula libre.

2.1.a Significado de las fuerzas generalizadas

La expresión

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

es una ecuación general que determina el elemento de trabajo hecho por una fuerza F en un desplazamiento

general $\delta \mathbf{s}$ de componentes $(\delta x, \delta y, \delta z)$. Como los desplazamientos virtuales $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ son totalmente arbitrarios, anulemos δq_2 y δq_3 , dejando que solamente q_1 varíe infinitesimalmente; luego, al transformar estos desplazamientos obtendremos lo siguiente:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1, \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1, \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1$$

ya que q_2 y q_3 , se han mantenido constantes.

Sustituyendo en la ecuación del trabajo virtual tenemos que:

$$\delta W_{q_1} = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1$$

y claramente, esto es equivalente a escribir:

$$\delta W_{q_1} = Q_1 \delta q_1$$

De aquí podemos ver que una fuerza generalizada se puede definir como una magnitud tal que el producto $Q_j \delta q_j$ es el trabajo hecho por fuerzas impulsoras cuando q_j varía en una cantidad δq_j . Junto a esto, es necesario recalcar que las fuerzas generalizadas no son siempre fuerzas en el sentido corriente de la palabra; por ejemplo, si la coordenada q_j es un ángulo θ , entonces la fuerza generalizada Q_j debe ser un momento a fin de que $Q_j \delta q_j$ sea un trabajo.

2.1.b Obtención de las fuerzas generalizadas

Para esta tarea poseemos dos métodos: el primero es el más directo, aunque puede resultar largo y monótono; consiste en remitirse a la definición antes presentada:

$$Q_j = F_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_j}$$

El segundo método es variar tan sólo una de las coordenadas, por ejemplo q_j , en δq_j y mantener todas las demás constantes. A continuación se determina por cualquier procedimiento adecuado el trabajo hecho por todas las fuerzas impulsoras cuando sólo varía esta coordenada.

Ejemplo 1:

Una partícula se mueve en la superficie de un cono, el que se aleja de un origen fijo como muestra la figura 1.

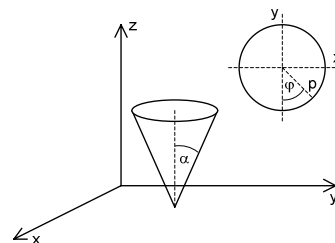


Figura 1. Sistema mecánico del Ejemplo 1.

Ecuación de restricción:

$$p = z \tan(\alpha)$$

Ecuación de transformación de coordenadas:

$$x = p \cos(\varphi)$$

$$y = p \sin(\varphi) + f(t)$$

$$z = z$$

Sea $q = (\varphi, z)^T$. Entonces las ecuaciones de transformación $r = r(t, q)$ son:

$$x = z \tan(\alpha) \cos(\varphi)$$

$$y = z \tan(\alpha) \sin(\varphi) + f(t)$$

$$z = z$$

La única fuerza externa es el peso de la partícula, luego, el Lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

donde:

$$\dot{x} = a(z \cos(\varphi) - z \sin(\varphi)\dot{\varphi})$$

$$\dot{y} = a(z \sin(\varphi) + z \cos(\varphi)\dot{\varphi}) + \dot{f}(t)$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

con $a = \tan(\alpha)$. Reemplazando los valores de las coordenadas en el Lagrangiano se obtiene:

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m[(a^2 + 1)\dot{z}^2 + a^2 z^2 \dot{\varphi}^2 + 2a\dot{f}(t)(z \sin(\varphi) + z \cos(\varphi)\dot{\varphi})] - mgz$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = ma\dot{f}(t)(z \cos(\varphi) - z \sin(\varphi)\dot{\varphi})$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = m(a^2 z \dot{\varphi}^2 + a\dot{f}(t) \cos(\varphi)\dot{\varphi}) - mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(a^2 z^2 \dot{\varphi} + a\dot{f}(t) z \cos(\varphi))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m((a^2 + 1)\dot{z} + a\dot{f}(t) \sin(\varphi))$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ma^2(2z\dot{z}\dot{\varphi} + z^2\ddot{\varphi}) + ma(\dot{f}z \cos(\varphi) + \dot{f}z \cos(\varphi) - \dot{f}z \sin(\varphi)\dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m(a^2 + 1)\ddot{z} + ma(\dot{f} \sin(\varphi) + \dot{f} \cos(\varphi)\dot{\varphi})$$

Finalmente, las ecuaciones de Lagrange son:

$$2az\ddot{\varphi} + za\ddot{\varphi} + \dot{f}(t) \cos(\varphi) = 0$$

$$(a^2 + 1)\ddot{z} - a^2 z \dot{\varphi}^2 + a\dot{f}(t) \sin(\varphi) + g = 0$$

Una vez planteado el modelo, puede ser necesario conocer las condiciones iniciales para las posiciones y velocidades, o sea, $z(0)$, $\dot{z}(0)$, $\varphi(0)$ y $\dot{\varphi}(0)$. El sistema de ecuaciones que resulta es no lineal y

complejo de resolver en forma analítica. Un método de hacerlo es utilizar un computador digital o uno analógico.

2.2 Sistemas Conservativos

Los sistemas conservativos tienen especial interés en el estudio de la dinámica ya que poseen algunas características sobresalientes, las cuales recordaremos a continuación.

Un campo de fuerza se dice conservativo si y solo si satisface las siguientes condiciones:

- La fuerza solo depende de la posición.
- La fuerza puede derivarse de un potencial, es decir, existe una función escalar Φ tal que $F = \nabla \Phi$.

Entonces, bajo estas condiciones se encuentra que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria e igual a la diferencia de potencial que exista entre los extremos de la misma.

Usando la notación V para designar a la energía potencial, definiremos el cambio de esta energía ΔV como el negativo del trabajo realizado por una fuerza conservativa al moverse entre dos posiciones dadas, o sea:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = - \int_{\Gamma} F \cdot dr$$

por lo tanto, se tiene que

$$F = -\nabla V$$

En lo que a nuestro estudio se refiere, veremos que la mayor utilidad de la función de energía potencial, radica en el hecho que cuando la expresamos en coordenadas generalizadas, las fuerzas generalizadas se obtienen mediante:

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Ahora deduciremos este resultado, para lo cual recordemos que las fuerzas generalizadas pueden expresarse por medio de la siguiente ecuación:

$$Q_k = \sum_{j=1}^p \left(F_{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + F_{y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + F_{z_j} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right)$$

Suponiendo ahora que las fuerzas aplicadas al sistema son conservativas, y por lo tanto sus componentes pueden ser expresadas como:

$$F_{x_j} = - \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

entonces la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$Q_k = - \sum_{j=1}^p \left(\frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right)$$

Gracias a que el miembro derecho de la ecuación anterior corresponde a la aplicación de la regla de la cadena, entonces se obtiene finalmente la relación:

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

2.3 Ecuaciones de Lagrange para Sistemas Conservativos

Utilizando el resultado anterior para fuerzas conservativas veremos que las ecuaciones de Lagrange presentan ahora una forma más familiar, luego que introduzcamos el concepto de la función de Lagrange.

Recordemos que para un sistema cualquiera las ecuaciones de Lagrange que anteriormente fueron deducidas tenían la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Ahora reemplazando Q_j por el resultado anterior y luego reagrupando la nueva expresión se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0$$

La función de Lagrange o Lagrangiano L del sistema se define como la diferencia entre las energías cinética y potencial. Además, la energía potencial depende solamente de las coordenadas y no de las velocidades generalizadas, o sea:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

por lo que las ecuaciones de Lagrange para sistemas conservativos siempre tendrán el siguiente aspecto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

donde:

$$L = T - V$$

2.4 Sistemas Parcialmente Conservativos

Si algunas de las fuerzas que actúan en el sistema no son conservativas, las ecuaciones de Lagrange pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

para lo cual, las fuerzas generalizadas deben calcularse en la forma acostumbrada tomando en cuenta únicamente las fuerzas no conservativas.

2.4.a Determinación de las fuerzas generalizadas para el caso de fuerzas disipativas.

El término disipativas se aplica a todas aquellas fuerzas que originan pérdidas (disipación) de energía del sistema durante el movimiento o evolución del mismo. Esta pérdida de energía usualmente se presenta por la formación de calor.

A menudo ocurre en la práctica que la magnitud de la fuerza disipativa es proporcional a alguna potencia de la velocidad de la partícula, es decir:

$$F = av^n$$

Para concretar ideas veremos que por lo general se encuentran 2 tipos de fuerzas disipativas, las cuales se clasifican como:

a) Fuerzas de fricción: Para roce dinámico, estas fuerzas se suponen proporcionales a la fuerza normal entre las superficies en contacto, independiente del área de contacto o de la velocidad de la partícula. Por lo tanto, usando la ecuación anterior, se tiene que $n=0$ y $a = \mu N$ donde μ es el coeficiente de roce, y la expresión de la fuerza es:

$$F = \mu N$$

b) Fuerzas de viscosidad: Se dice que una fuerza es viscosa cuando depende de la primera potencia de la velocidad y se opone al movimiento, o sea,

$$F = bv$$

en que b es el coeficiente de viscosidad.

Existen dos métodos para determinar las fuerzas generalizadas de tipo disipativo: el primero es idéntico a los que ya han sido presentados, solo hay que tener en cuenta que si $F = av^n$ y además como $\dot{x}/v$ es el coseno del ángulo entre v y x , podemos entonces descomponer esta fuerza de la siguiente forma:

$$F_x = -av^n \left(\frac{\dot{x}}{v} \right) = -a\dot{x} v^{n-1}$$

$$F_y = -a\dot{y} v^{n-1}$$

$$F_z = -a\dot{z} v^{n-1}$$

y por lo tanto:

$$\delta W_{total} = - \sum_{i=1}^n a_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) v_i^{n-1}$$

A continuación se aplican las ecuaciones de transformación para las coordenadas y después se reagrupan términos, reconociendo una fuerza generalizada Q_j en el coeficiente que acompañe a cada $\delta \dot{q}_j$.

La segunda forma usada para determinar las fuerzas generalizadas de tipo disipativo se denomina método de la función de potencia.

Existe un gran número de fuerzas, incluidas las conservativas y muchas formas de disipativas, para las que es posible escribir una función P tal que las fuerzas generalizadas estén dadas por:

$$Q_j = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}$$

La función P es análoga al potencial y se define de la siguiente forma:

$$P = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

De la última ecuación es evidente que la función P tiene dimensiones de potencia, motivo por el cual se denomina función de potencia. Ahora bien, si las fuerzas involucradas son de naturaleza tal que cumplen la siguiente condición :

$$\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}$$

entonces, al evaluar la integral se obtiene una cantidad P tal que:

$$F_x = \frac{\partial P}{\partial \dot{x}}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión para las fuerzas generalizadas obtenemos, y aprovechando que:

$$\frac{\partial x}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_j}$$

se obtiene la siguiente relación:

$$Q_j = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial P}{\partial q_j}$$

Para el caso particular de la función de fricción, función de potencia toma los siguientes valores en función de sus parámetros:

- Fricción en seco:

$$F = a \Rightarrow P = av$$

- Resistencia viscosa (amortiguación):

$$F = av \Rightarrow P = \frac{1}{2} av^2$$

- Forma general:

$$F = av^n \Rightarrow P = \frac{1}{n+1} av^{n+1}$$

3. ECUACIONES DE LAGRANGE APLICADAS A SISTEMAS ELÉCTRICOS Y ELECTROMECÁNICOS

Las ecuaciones de Lagrange pueden ser directamente aplicadas a una gran variedad de sistemas eléctricos y electromecánicos, siendo especialmente útiles en el estudio de estos últimos.

Los conceptos que ya fueron tratados, es decir coordenadas generalizadas, energía cinética, energía potencial, ecuaciones de restricción, etc. que se aplican a sistemas mecánicos, tienen todas ellas su contraparte en los sistemas eléctricos. Por tanto, con una adecuada elección de coordenadas y con las expresiones adecuadas para T y V , la forma de las ecuaciones que se obtienen al tratar sistemas electromecánicos es la misma de las ya conocidas ecuaciones de Lagrange en sistemas dinámicos.

3.1 Circuitos Eléctricos

Las coordenadas que elegiremos para describir los circuitos eléctricos son las cargas $q_1, q_2, \dots, q_n$ que pasan por las diferentes ramas del circuito después de un instante de tiempo determinado. Entonces la corriente $i = \dot{q}$ corresponde a una "velocidad" e igualmente $\dot{q}$ representa una "aceleración". La dirección positiva para el flujo de cargas es totalmente arbitraria, pero nosotros mantendremos el sentido convencional.

Las ecuaciones de restricción en un circuito eléctrico están dadas por las ecuaciones de Kirchhoff, y los grados de libertad están dados por la diferencia entre el número de ramas y el número de nodos del circuito eléctrico.

3.1.a Energía Cinética

La energía magnética de una bobina de inductancia constante es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L q^2$$

la cual tiene la misma forma que la energía cinética de una partícula. Por lo tanto se puede establecer una equivalencia entre la energía magnética del circuito eléctrico y la energía cinética de un sistema de partículas. Además la energía de dos bobinas con autoinductancias L_{11} y L_{22} e inductancia mutua L_{12} es

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (L_{11} q_1^2 + 2L_{12} q_1 q_2 + L_{22} q_2^2)$$

En el caso más general de un circuito que contiene s bobinas, la "energía cinética eléctrica" estará dada por

$$T_{EL} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{r=1}^s L_{ir} q_i q_r$$

Las coordenadas superfluas deben ser eliminadas de esta expresión por medio de las ecuaciones de restricción.

3.1.b Energía Potencial

La energía potencial de un circuito puede considerarse como una composición de dos partes: las fuentes de energía (baterías, generadores) y la energía almacenada en los condensadores.

Una fuente de voltaje E , suministra una energía al sistema igual a $E q$, en donde q es la carga entregada por la fuente. Así, si se refiere la energía potencial al punto $q = 0$, entonces ésta se escribe:

$$V_{fuente} = -E q$$

Nótese la analogía de esto con la energía potencial gravitatoria

$$V = -mgh$$

de una partícula de masa m . La relación anterior es válida aunque E varíe con el tiempo.

La energía de un condensador cargado aislado, de capacidad C , puede escribirse como:

$$\mathcal{E} = \frac{q^2}{2C}$$

que es completamente equivalente a la energía de un resorte:

$$\mathcal{E} = \frac{Kx^2}{2}$$

luego, $1/C$ corresponde a K en esta analogía.

Por tanto, la energía potencial del circuito que contiene varias fuentes y condensadores, está dada por:

$$V_{EL} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{q_k^2}{C_k} - \sum_k E_k q_k$$

Si los condensadores tienen cargas iniciales $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$, entonces las energías de cada uno de ellos quedan descritas mediante:

$$V_j = \frac{(q_j + q_{j0})^2}{2C_j}$$

y si la corriente q_k circula en dirección opuesta a la positiva de E , entonces $E_k q_k$ debe tomarse como positiva.

3.1.c Fuerzas generalizadas en un circuito eléctrico

Las "fuerzas básicas" que actúan en un circuito eléctrico pueden ser ilustradas directamente si tomamos una malla que contenga todos los elementos que ya conocemos: resistencias, bobinas, condensadores y fuentes de potencial.

Aplicando las leyes de Kirchhoff obtenemos la siguiente ecuación:

$$L\dot{q} = E - \frac{q}{C} - Rq$$

Haciendo la analogía con los sistemas mecánicos, vemos que Lq corresponde a una "fuerza inercial", tal como $M\dot{x}$; q/C corresponde a la fuerza ejercida por un resorte, análogo con kx ; E es la "fuerza" aplicada por la fuente y $-Rq$ corresponde exactamente a una fuerza disipativa, como $-b\dot{x}$.

La fuerza total generalizada Q_i , correspondiente a la variable generalizada q_i , puede ser convenientemente considerada como formada por fuerzas disipativas (originada en las resistencias) y por fuerzas conservativas (pueden derivarse de la energía potencial).

Las ecuaciones de fuerzas generalizadas disipativas pueden ser obtenidas en forma totalmente análoga a como se obtienen en sistemas mecánicos. Así vemos que cuando la carga δq_i circula por R_i , el trabajo correspondiente (energía disipada) es igual a:

$$\delta W_i = -R_i q_i \delta q_i$$

Por tanto para un sistema que contenga un número arbitrario de resistencias se tiene:

$$\delta W = -\sum_i R_i q_i \delta q_i$$

Entonces, una vez eliminadas las corrientes y cargas superfluas (a través de las ecuaciones de restricción), se agrupan términos y la fuerza generalizada correspondiente a las resistencias puede leerse directamente de la ecuación anterior. Sin embargo, en muchos casos resulta ser más útil la función de potencia para evaluar las fuerzas disipativas, ya que una vez hallada se tiene que:

$$Q_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}$$

La función de potencia en circuitos eléctricos puede adoptar dos formas:

$$P = -\frac{1}{2} \sum_i R_i q_i^2 \quad \text{o bien} \quad P = -\sum_i \frac{A}{n+1} q_i^{n+1}$$

La primera (que es un caso especial de la segunda) es aplicable en todos los casos en que las resistencias sean lineales es decir:

$$\delta W = -Rq \delta q$$

La segunda se aplica cuando la caída de voltaje a través de una resistencia está dada por:

$$E = Aq^b$$

es decir:

$$\delta W = -Aq^b \delta q.$$

En cualquiera de las formas de la función de potencia las corrientes superfluas deben ser eliminadas.

Ahora bien, la fuerza total generalizada esta dada por:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + (Q_i)_{nc}$$

entonces se puede formar el Lagrangiano para sistemas eléctricos de la siguiente manera:

$$L_{EL} = T_{EL} - V_{EL}$$

para luego escribir las ecuaciones de Lagrange en la forma ya conocida:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{EL}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_{EL}}{\partial q_i} = (Q_i)_{nc}$$

Esta forma es cierta solamente para sistemas de parámetros concentrados y donde el número de elementos es finito. $(Q_i)_{nc}$ solo contiene fuerzas disipativas, ya que la conservativas se tienen en cuenta en forma automática en la función energía potencial.

Ejemplo 2:

A continuación se presenta la deducción de las ecuaciones de Lagrange para el circuito eléctrico de la figura 2.

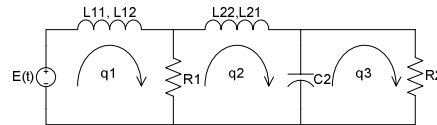


Figura 2: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.

La energía cinética del circuito es:

$$T = \frac{1}{2} (M_{11} q_1^2 + 2M_{12} q_1 q_2 + M_{22} q_2^2)$$

La energía potencial del circuito es:

$$V = \frac{1}{2C} (q_2 - q_3)^2 - E q_1$$

El Lagrangiano del circuito es:

$$L = \frac{1}{2}(M_{11}\dot{q}_1^2 + 2M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + M_{22}\dot{q}_2^2) - \frac{1}{2C}(q_2 - q_3)^2 + E q_1$$

La potencia disipada del circuito es:

$$P = \frac{1}{2}(R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + R_1\dot{q}_3^2)$$

Las derivadas parciales correspondientes al desarrollo son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= E \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{1}{C}(q_2 - q_3) \\ \frac{\partial L}{\partial q_3} &= \frac{1}{C}(q_2 - q_3) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) &= L_{11}\ddot{q}_1 + L_{12}\ddot{q}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) &= L_{12}\ddot{q}_1 + L_{22}\ddot{q}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_1} &= R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_2} &= -R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_3} &= R_2\dot{q}_3 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange son finalmente:

$$\begin{aligned} L_{11}\ddot{q}_1 + L_{12}\ddot{q}_2 - E &= -R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ L_{12}\ddot{q}_1 + L_{22}\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}(q_2 - q_3) &= R_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ -\frac{1}{C}(q_2 - q_3) &= -R_2\dot{q}_3 \end{aligned}$$

3.2 Sistemas Electromecánicos

Un sistema electromecánico es aquel en el que la energía asociada es eléctrica, magnética y mecánica. Además, por lo general las energías mecánicas y las electromagnéticas serán mutuamente dependientes, motivo por el cual el movimiento mecánico y el funcionamiento eléctrico no pueden estudiarse en forma separada. Dicho en otras palabras, el sistema debe ser considerado en forma global.

La función de Lagrange para un sistema electromecánico puede escribirse como

$$\begin{aligned} L &= T_{EL} - V_{EL} + T_{MEC} - V_{MEC} \\ &= L_{EL} + L_{MEC} \end{aligned}$$

La energía cinética mecánica y la energía potencial mecánica se representan por T_{EL} y V_{EL} respectivamente, expresadas en la forma acostumbrada, en función de cualquier sistema de coordenadas espaciales $q_1, q_2, \dots, q_{N_1}$. Si, además de estas N_1

coordenadas espaciales, se deben tener en cuenta N_2 cargas independientes (coordenadas eléctricas) puede decirse entonces que el sistema tiene:

$$N = N_1 + N_2$$

grados de libertad.

Al escribir el Lagrangiano electromecánico para un problema específico es necesario ser cuidadoso en la selección de las unidades, de modo que todos los términos que conformen al Lagrangiano se expresen en las mismas unidades de energía.

Las fuerzas generalizadas (que no han sido tenidas en cuenta por los términos de la energía potencial en el Lagrangiano) correspondientes a coordenadas eléctricas y espaciales se encuentran en la forma ya acostumbradas.

Ejemplo 3:

Se presenta a continuación la deducción de las ecuaciones de Lagrange para el sistema electromecánico de la figura 3.

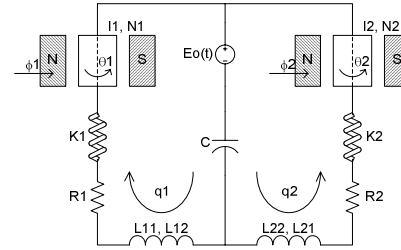


Figura 3. Sistema electromecánico del Ejemplo 3.

Energía cinética:

$$\begin{aligned} T_{MEC} &= \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 \\ T_{EL} &= \frac{1}{2}(L_{11}\dot{q}_1^2 + 2L_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + L_{22}\dot{q}_2^2) \end{aligned}$$

Energía potencial:

$$\begin{aligned} V_{MEC} &= \frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2\theta_2^2 - N_1\phi_1\theta_1 - N_2\phi_2\theta_2 \\ V_{EL} &= \frac{1}{2C}(q_1 + q_2)^2 - E_0(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Función potencia:

$$P = \frac{1}{2}(R_1\dot{q}_1^2 + R_2\dot{q}_2^2)$$

Coordenadas generalizadas:

$$Q = (\theta_1, \theta_2, q_1, q_2)^T$$

Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} (L_{11} q_1^2 + 2L_{12} q_1 q_2 + L_{22} q_2^2) - \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} K_2 \theta_2^2 + N_1 \phi_1 q_1 \theta_1 + N_2 \phi_2 q_2 \theta_2 - \frac{1}{2C} (q_1 + q_2)^2 + E_0 (q_1 + q_2)$$

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -K_1 \theta_1 + N_1 \phi_1 \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -K_2 \theta_2 + N_2 \phi_2 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = E_0 - \left(\frac{q_1 + q_2}{C} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = E_0 - \left(\frac{q_1 + q_2}{C} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_1 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = I_2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = L_{11} \dot{q}_1 + L_{12} \dot{q}_2 + N_1 \phi_1 \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = L_{12} \dot{q}_1 + L_{22} \dot{q}_2 + N_2 \phi_2 \theta_2$$

Finalmente, las ecuaciones de Lagrange son las siguientes:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 - N_1 \phi_1 \dot{q}_1 = 0$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \theta_2 - N_2 \phi_2 \dot{q}_2 = 0$$

$$L_{11} \ddot{q}_1 + L_{12} \ddot{q}_2 + N_1 \phi_1 \dot{\theta}_1 + N_1 \phi_1 \theta_1 + \frac{q_1 + q_2}{C} - E_0 = -R_1 \dot{q}_1$$

$$L_{12} \ddot{q}_1 + L_{22} \ddot{q}_2 + N_2 \phi_2 \dot{\theta}_2 + N_2 \phi_2 \theta_2 + \frac{q_1 + q_2}{C} - E_0 = -R_2 \dot{q}_2$$

A. APENDICE: CALCULO DE VARIACIONES

Uno de los problemas más característicos del cálculo variacional es el de extremalizar una integral dada, para lo cual se busca imponer condiciones sobre la función integrando.

Sea una función $F(x, y, \dot{y})$, entonces trataremos de determinar una función $y(x)$ continuamente diferenciable tal que la función I , definida por:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y}) dx$$

con $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$.

que es una integral definida, tome un valor extremo (máximo o mínimo), aunque, para fijar ideas, supondremos que I debe ser minimizada.

Supongamos que ya conocemos la función minimizante $y(x)$ (trayectoria real) y tomemos cualquier función

arbitraria y diferenciable $h(x)$ tal que se anule en los extremos. Luego para cualquier constante infinitesimal ε la trayectoria variada, definida por la función:

$$y_v(x) = y(x) + \varepsilon h(x)$$

cumplirá con las condiciones de borde.

Reemplacemos ahora la trayectoria real $y(x)$ por la variada infinitesimalmente $y_v(x)$ en la integral I , obteniendo:

$$I_v = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon h, \dot{y} + \varepsilon \dot{h}) dx$$

Entonces, una vez que las funciones h e y han sido fijadas, esta integral pasa a ser función solamente de ε . Esta función tomará su valor mínimo cuando $\varepsilon = 0$ (por hipótesis) y esto será posible si y solo si:

$$\left. \frac{dI_v(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Tomando la derivada bajo el signo integral tenemos lo siguiente:

$$\frac{dI_v}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_v} \frac{\partial y_v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_v} \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial \varepsilon} \right) dx$$

Evaluando ahora en $\varepsilon = 0$ vemos que esta ecuación queda de la siguiente forma:

$$\left. \frac{dI_v}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{h}(x) \right) dx = 0$$

y utilizando la regla de integración por partes se obtiene,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} h(x) \right|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right] h(x) dx = 0$$

Sin embargo, como una de las condiciones impuestas es que $h(x)$ se anule en los extremos, entonces el primer término de ésta expresión resulta ser igual a cero.

Ahora, si multiplicamos la ecuación por ε y notamos la variación de y como:

$$\delta y = y_v - y = \varepsilon h$$

entonces llegamos a la siguiente expresión:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta y \right\} dx = 0$$

Como δy es completamente arbitrario para todos los valores de x , desde x_1 hasta x_2 , entonces, para asegurar que esta integral es nula, es necesario que el coeficiente de δy (la expresión entre corchetes) sea cero en todo el intervalo en cuestión. Hemos logrado de esta manera encontrar la condición buscada, es decir, para que una función $y(x)$ haga mínima (o máxima) una integral como I , es necesario que satisfaga la llamada Ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Aquí las derivadas parciales se han formado considerando a los argumentos de la función F como variables independientes.

AGRADECIMIENTOS

En la elaboración del apéndice de este apunte contribuyó el Sr. Ricardo Escudero, al cual se le agradece su valiosa colaboración.

BIBLIOGRAFIA

R.P. Feynman y otros. The Feynman lectures on Physics, mainly mechanics, radiation and heat. Vol. 2, Capítulo 19. Addison Wesley, 1965.

H. Lamb, Higher Mechanics. University Press, 1943, Capítulo 12.

T.C. Huang, Engineering mechanics, Vol. 2. Dynamics. Addison Wesley, 1967.

D.A. Wells, Teoría y problemas de dinámica de Lagrange, con un estudio de ecuaciones del movimiento de Euler. Mc Graw Hill 1972.