ANALOGIAS ELECTRICAS DE DIFERENTES PROCESOS

Manuel A. Duarte Mermoud
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Casilla 412-3, Santiago
CHILE

Resumen: En este capítulo se analizan las analogías eléctricas de diferentes sistemas dinámicos. Se plantean las principales definiciones y se analizan algunos ejemplos mecánicos. Posteriormente se incorporarán otro tipo de analogías.

1. INTRODUCCION

Las analogías constituyen diversas realizaciones de un modelo matemático determinado, es decir, cuando los fenómenos que involucran sistemas físicos completamente diferentes se pueden describir por medio de las mismas ecuaciones matemáticas, decimos que ambos sistemas son análogos. Así, las dificultades que podrían surgir experimentando con un determinado sistema pueden eliminarse experimentando con un sistema análogo.

La variedad de las analogías es tan amplia como los procesos y sus modelos, sin embargo, aquellas correspondientes a sistemas lineales son las más útiles y empleadas. En particular, las analogías en base a circuitos eléctricos han dado origen al Computador Analógico.

En la Tabla 2 se muestran diversas analogías entre los elementos lineales de diversos tipos de procesos, relativas a sistemas eléctricos.

Como es evidente, los circuitos eléctricos son más fáciles de armar y menos costosos para experimentación que un sistema mecánico, térmico, hidráulico o neumático. Esto da a la Ingeniería Eléctrica una gran ventaja sobre las demás, ya que se pueden modelar fácilmente fenómenos de otros campos de la ingeniería con sus análogos eléctricos.

A continuación se describirá en forma detallada como enfrentar el proceso de construir analogías partiendo por el caso mecánico.

2. ANALOGIAS ELECTRO-MECANICAS

Se hará un breve repaso de los sistemas oscilatorios.

2.1 Vibración Libre y Forzada

En el caso del modelo vibratorio masa/resorte, la fuerza del resorte es la que produce la vibración, luego es una fuerza que está dentro de la frontera del sistema, es un parámetro interno, por ende la vibración se llama libre.

Cuando la vibración es producida por una fuerza aplicada externamente, i.e. cuando el sistema tiene una entrada, entonces dicha vibración será llamada forzada.

Los tipos de entrada o fuerzas aplicadas (a las que también llamaremos fuentes) pueden ser de varios tipos, entre los cuales se encuentran: senoidal, periódicas, constantes, no periódicas, aleatorias, etc.

2.2 Composición de resortes

Cuando n resortes se conectan en paralelo podemos sustituirlos por uno sólo equivalente (figura 1), donde:

$$K_{eq} = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

Cuando n resortes se conectan en serie también podemos sustituirlos por un resorte equivalente (figura 2), donde:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}$$

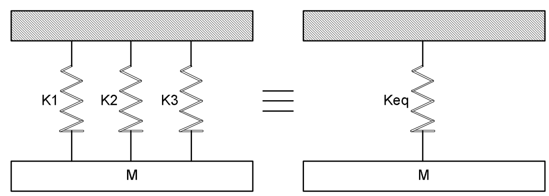

Figura 1: Conexión paralelo de resortes.

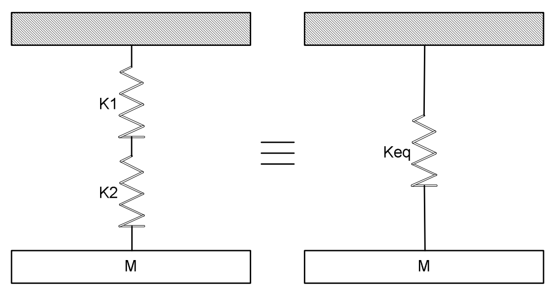

Figura 2: Conexión serie de resortes.

Este mismo fenómeno de equivalencia se repite en diversos modelos físicos, más particularmente, en los circuitos eléctricos, donde, por ejemplo, los condensadores cumplen la misma ley de equivalencia serie y paralelo que los resortes.

2.3 Fuerza amortiguadora

A menudo un sistema vibratorio esta sujeto a una fuerza amortiguadora que representa la fuerza de roce u otras fuerzas amortiguadoras sobre el sistema. Recordemos el amortiguamiento viscoso en el caso de los líquidos que es proporcional y de sentido contrario a la velocidad, descrito por la ecuación:

$$F = -Cv$$

con *C* constante de proporcionalidad o coeficiente de amortiguamiento viscoso.

Al igual que en el caso de resortes, los amortiguadores se pueden conectar en serie o paralelo. ¿qué relaciones y analogías es capaz de encontrar usted en este caso?

Observación: cuando las fuerzas de fricción son despreciables en comparación con las fuerzas aplicadas sobre el sistema, este se puede considerar como no amortiguado, lo cual es una muy buena hipótesis simplificatoria.

2.4 Grados de libertad

El número de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento de un sistema es el grado de libertad del sistema. Por cada partícula que estemos interesados en el sistema tenemos un grado de libertad (recordemos que estamos hablando de un sistema oscilatorio), si estas se mueven en una sola dirección. Si tenemos 2 partículas y éstas a la vez se mueven en 2 direcciones cada una, entonces tendremos 4 grados de libertad, ya que necesitaremos 4 coordenadas independientes para especificar el sistema dinámico.

2.5 Ecuación general de movimiento para una partícula con un grado de libertad

Consideremos el caso de una partícula oscilatoria que está sujeta a la acción de una fuerza de resorte, una de amortiguamiento y otras aplicadas externamente, tal como se muestra en la figura 3. Supongamos que se mueve en una sola dirección, entonces como es una sola partícula que se mueve en una dirección tenemos sólo un grado de libertad, por ende, con una sola coordenada podemos describir el sistema dinámico.

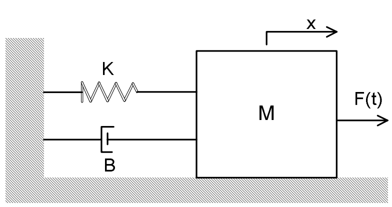

Figura 3: Partícula en una dimensión.

La ecuación del movimiento es

$$F_R + F_A + F(t) = M\ddot{x}(t)$$

o bien

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

La ecuación puede ser reformulada de la siguiente manera:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{M} F(t) \qquad (2.1)$$

con $2\alpha = \frac{B}{M}$ y $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Se deja propuesto al lector encontrar la solución de la ecuación diferencial para los siguientes casos:

1) $B = F(t) = 0$ (Vibración libre no amortiguada).

2) $B = 0$ (Vibración forzada sin amortiguamiento).

3) $F(t) = 0$ (Vibración libre amortiguada).

4) Caso general.

2.6 Método General para la Analogía de Movimientos Oscilatorios con Circuitos Eléctricos

Existen dos maneras de relacionar en forma análoga los sistemas lineales mecánicos con los circuitos eléctricos lineales. Ellas se representan en la tabla 1.

La analogía fuerza-voltaje/velocidad-corriente conduce a una formulación por bucles del circuito eléctrico; en cambio la analogía fuerza-corriente/velocidad-voltaje conduce a una formulación por nodos de la red eléctrica. Consideremos de ahora en adelante el caso de la analogía fuerza-voltaje/ velocidad-corriente.

Un método para obtener la analogía entre ambos sistemas es el siguiente:
1. Por cada grado de libertad del sistema mecánico hay un circuito cerrado o bucle correspondiente al circuito eléctrico.

2. Cualquier masa con sus conexiones ligadas y cualquier fuerza actuando sobre ella forman un circuito cerrado.

<u>Ejemplo 1:</u>

Consideremos el sistema mecánico de la figura 4. Las ecuaciones del movimiento son:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

con $K = 2K_1 + 2K_2$.

Esto no es más que un caso particular de la ecuación general (2.1), ya que se tiene:

$$\alpha = 0 \text{ y } \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

y por lo tanto su solución es:

$$x(t) = Asen(\omega t) + Bsen(\omega t)$$

El circuito análogo eléctrico se muestra en la figura 5.

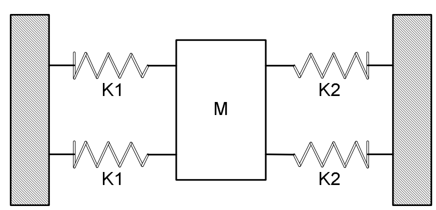

Figura 4: Sistema mecánico del Ejemplo 1.

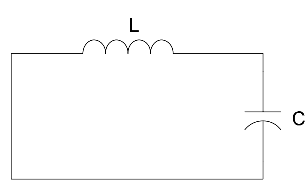

Figura 5: Análogo eléctrico del Ejemplo 1.

Las ecuaciones que describen el circuito de la Figura 5 son:

Circuito Mecánico	Circuito Eléctrico Fuerza-Voltaje/Velocidad-Corriente	Circuito Eléctrico Fuerza-Corriente/Velocidad-Voltaje
F (Fuerza)	*e* (Voltaje)	*i* (Corriente)
v (Velocidad)	*i* (Corriente)	*e* (Voltaje)
m (Masa)	*L* (Inductancia)	*C* (Condensador)
K (Cte. elástica)	$1/C$ (Condensador)	$1/L$ (Inductancia)
B (Cte. amortiguador)	*R* (Resistencia)	$1/R$ (Resistencia)
$x(t)$ (desplazamiento)	$q(t)$ (Carga)	$\phi(t)$ (Flujo magnético)

Tabla 1: Formulaciones para analogías de movimiento oscilatorio con circuitos eléctricos

$$V_C(t) + V_L(t) = 0$$

$$I = C\frac{d\,v_C}{dt}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{C}V_c(t) + L\ddot{V}_c = 0$$

cuya solución es

$$V_c(t) = Asen(\omega t) + Bsen(\omega t)$$

De esta manera se obtienen las siguientes analogías:

$$K = \frac{1}{C} \text{ y } L = M$$

<u>Ejemplo 2:</u>

En la figura 6 se muestra un sistema mecánico de varios elementos. Las ecuaciones del modelo matemático de este sistema son :

$$m_1\ddot{x}_1 + B_1\dot{x}_1 + B_3\dot{x}_1 + k_1x_1 - B_3\dot{x}_2 = F(t)$$

$$-B_3\dot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + B_2\dot{x}_2 + B_3\dot{x}_2 + k_2x_2 = 0$$

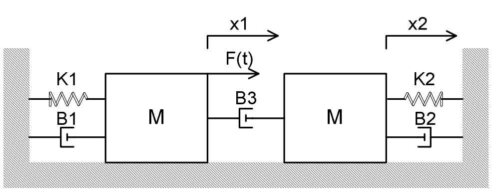

Figura 6. Sistema mecánico de varios elementos

Considerando estas ecuaciones y usando la analogía electro-mecánica fuerza-corriente/velocidad-voltaje se obtiene los siguientes parámetros para el circuito eléctrico.

$$L_1 = \frac{1}{k_1},\ C_1 = M_1,\ L_2 = \frac{1}{k_2},\ C_2 = M_2$$

$$R_1 = \frac{1}{B_1},\ R_2 = \frac{1}{B_2},\ R_3 = \frac{1}{B_3},\ I(t) = F(t)$$

y usando la analogía fuerza-corriente/velocidad-voltaje se obtienen los siguientes valores para los parámetros:

$$C_1 = \frac{1}{k_1},\ L_1 = M_1,\ C_2 = \frac{1}{k_2},\ L_2 = M_2$$

$$R_1 = B_1,\ R_2 = B_2,\ R_3 = B_3,\ E(t) = F(t)$$

Los esquemas de ambas formulaciones para el circuito eléctrico son presentados en la figura 7.

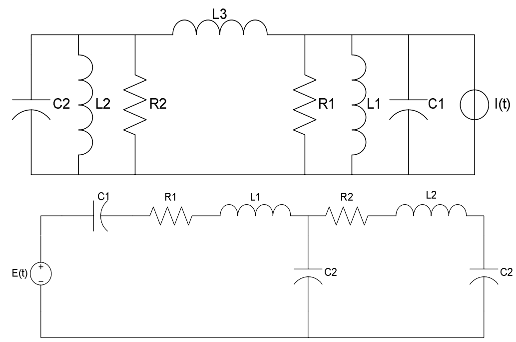

Figura 7: Circuitos eléctrico análogos del ejemplo 2 (Formulación por nodos y mallas respectivamente).

2.7 Principio de D'alembert

Como sabemos la ecuación de movimiento de Newton es de la forma:

$$F = m\ddot{r}$$

donde la parte izquierda representa la resultante de las fuerzas aplicadas y el miembro derecho es la fuerza efectiva. Luego, se puede reformular de la siguiente forma:

$$F - (m\,\ddot{r}) = 0 \qquad (2.2)$$

representando a la suma de las fuerzas aplicadas exteriormente, reales y ficticias. Este sistema de fuerzas está en equilibrio estático, ya que el miembro derecho de (2.2) es cero, o sea, es equivalente a un sistema formulado de la siguiente manera:

$$F = 0$$

que tiene la misma forma que la ecuación de equilibrio estático. Este es el Principio de D'alembert, y la ecuación anterior se llama a menudo ecuación de equilibrio dinámico.

Con esto se puede convertir un problema dinámico a uno estático, con todas las simplificaciones inherentes. Así, se pueden tomar momentos con respecto a cualquier punto base, sin restricciones (no así en problemas dinámicos).

Todo lo que anteriormente ha sido descrito para sistemas mecánicos con movimiento de traslación es aplicable también al caso de sistemas mecánicos con movimiento de rotación. ¿Podría usted identificar las diferentes analogías que surgen en este caso?

Existe también una analogía para un transformador eléctrico. ¿Cuáles cree usted son los elementos mecánicos que cumplen un papel análogo al de un

Proceso	Variables		Parámetros		
Eléctrico	Voltaje $[V]$	Corriente $[A]$	Resistencia eléctrica $[\Omega]$	Capacidad eléctrica $[F]$	Inductancia $[H]$
Fluido Líquido	Presión $[Kg/m^2 s]$	Flujo volumétrico $[m^3/s]$	Presión/Flujo vol. $[Kg/m^5]$	Área $[m^2]$	Inercia $[Kg/m^5]$
Fluido Gaseoso	Presión $[Kg/m^2 s]$	Flujo másico $[Kg/s]$	Presión/Flujo másico $[1/m^2]$	Masa/Presión $[m^2 s]$	Inercia $[1/m^2]$
Térmico	Temperatura $[^{o}C]$	Flujo calórico $[cal/s]$	Temp./Flujo cal. $[^{o}C/cal \cdot s]$	Calor/Temp. $[cal/^{o}C]$	(no existe análogo)
Mecánico	Velocidad $[m/s]$	Fuerza $[N]$	Vel./Fuerza $[s/Kg]$	Masa $[Kg]$	Compresibilidad $[ms/Kg]$

Tabla 2: Analogías entre elementos de distintos procesos.

transformador eléctrico tanto en el caso de traslación como de rotación?

Ejercicio 1:
Considere el sistema mecánico presentado en la figura 8, donde:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

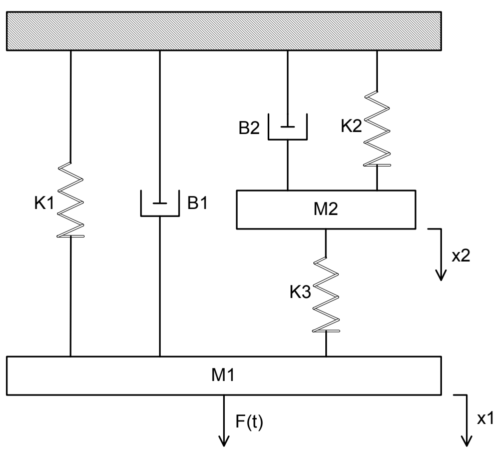

Figura 8: Sistema mecánico correspondiente al ejercicio 2.7.a

Demostrar que el circuito eléctrico análogo está dado por el esquema de la figura 9, donde los parámetros del circuito se relacionan con los parámetros mecánicos de la siguiente forma:

$$L_1 = \frac{1}{K_1},\; C_1 = M_1,\; L_2 = \frac{1}{K_2},\; C_2 = M_2$$

$$R_1 = \frac{1}{B_1},\; R_2 = \frac{1}{B_2},\; R_3 = \frac{1}{B_3},\; I(t) = F(t)$$

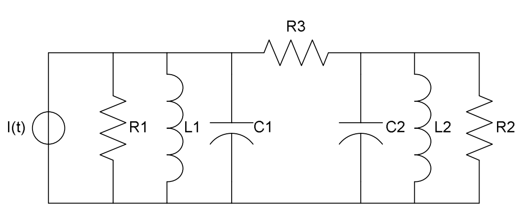

Figura 9: Circuito eléctrico equivalente al sistema mecánico de la figura 8

3. ANALOGIA ELECTRICA DE SISTEMAS TERMICOS

En la figura 10 se muestra un calentador de agua. La ecuación básica del modelo resulta ser (después de un balance energético):

$$C\frac{dT}{dt} + F(T - T_e) + \frac{T - T_a}{R} = q \qquad (3.1)$$

donde:
m : Masa del agua retenida en el estanque
C : Calor específico del agua
F : Flujo másico de agua a la entrada (y salida)
R : Resistencia térmica de la aislación
T : Temperatura de agua en el estanque (y a la salida)
T_e : Temperatura del agua a la entrada
T_a : Temperatura del aire alrededor del estanque
q : Velocidad de entrega de flujo de calor del calefactor.

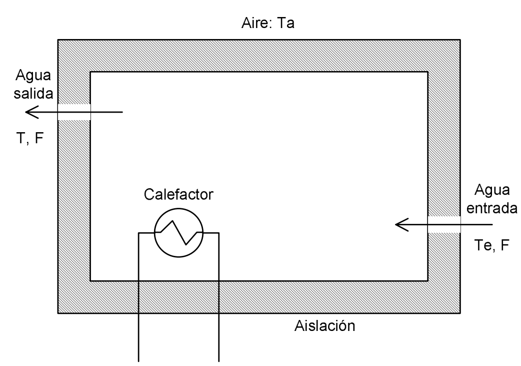

Figura 10: Calentador eléctrico de agua.

En base a la ecuación (3.1) se obtiene el circuito eléctrico analógico, presentado en la figura 11.

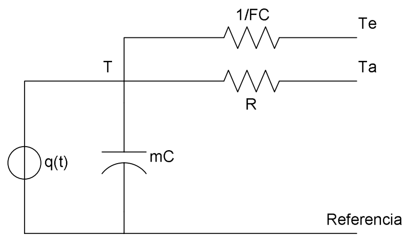

Figura 11: Circuito eléctrico analógico del calefactor de agua.

AGRADECIMIENTOS

En la elaboración de esta parte de los apuntes contribuyó el Sr. Víctor Cáceres, al cual se le agradece su valiosa colaboración.

REFERENCIAS

J. Yutronic, Apuntes del Curso El302 Análisis y Modelación de Sistemas Dinámicos, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 1976.

M. Duarte, Apuntes de Clases del Curso EL 32D Análisis y Modelación de Sistemas Dinámicos, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, 1980-1990.

D.M. Himmelblau and K.B. Bischoff, Process analysis and simulation: Deterministic systems. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1968.

T.J. Williams, R.E. Goodson, L.B. Koppel and R.D. Gustafson, Modeling of industrial procesess for computer control. Vol. 1, Purdue University, 1967.

R.G.E. Franks, Mathematical modeling in chemical engineering. John Wiley & Sons, 1967.