

## SOLUCIONES ANALÍTICAS DE FLUJO EN REGIMEN TRANSIENTE

### CI66J/CI71T Modelación de Aguas Subterráneas

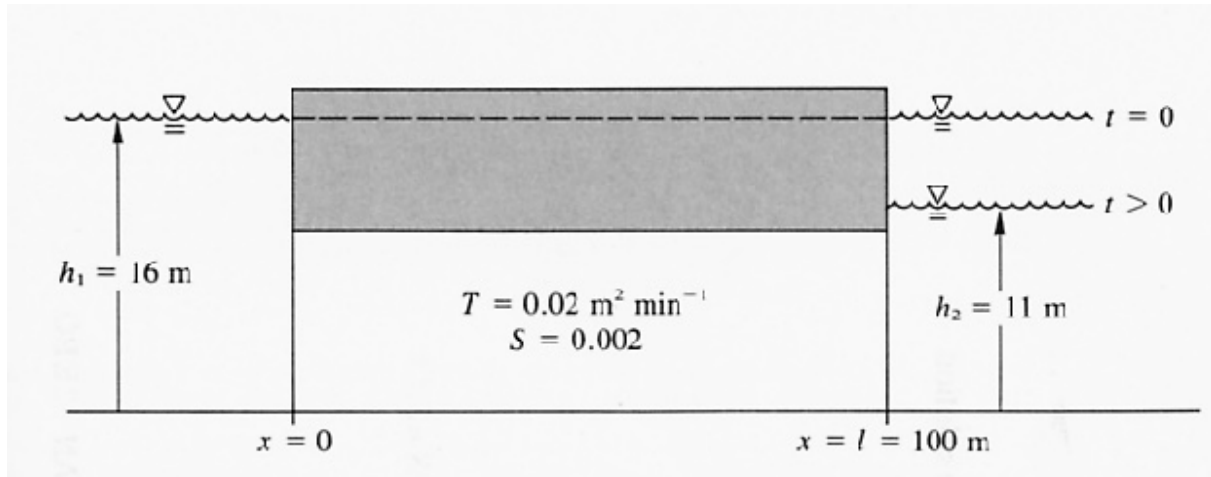
Profesor C. Espinoza

Semestre Otoño 2007

#### 1. RESPUESTA DE UN ACUÍFERO ANTE UN CAMBIO BRUSCO EN EL NIVEL DEL EMBALSE

Consideremos el caso que se muestra en la Figura 1.1, la que presenta un acuífero confinado que se encuentra inicialmente con un nivel piezométrico constante e igual a 16 m. Se desea estudiar los cambios en el nivel de energía del sistema (nivel piezométrico) ante un cambio brusco en el nivel del embalse ubicado en el costado derecho del acuífero.

**Figura 1.1**  
**Modelo de Embalse**



Por simplicidad consideremos un sistema de flujo unidimensional en un acuífero confinado como el que se muestra en la Figura 1.1. La ecuación diferencial que gobierna el flujo se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.1)$$

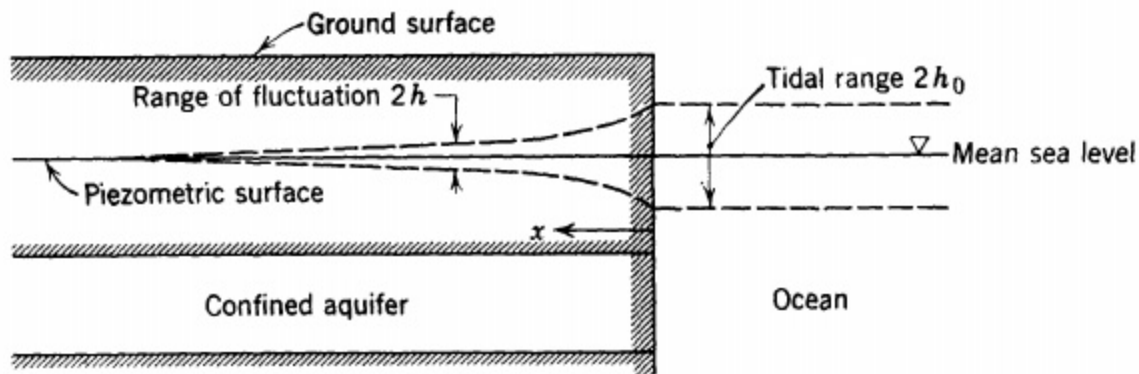
donde  $h$  es la elevación de la superficie piezométrica,  $x$  es la distancia medida desde el extremo izquierdo del acuífero,  $S$  es el coeficiente de almacenamiento del acuífero,  $T$  es la transmisibilidad y  $t$  es el tiempo. La solución analítica de este problema fue obtenida por Carslaw and Jaeger (1959), utilizando series de Fourier, y tiene la siguiente expresión:

$$h(x,t) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} \cdot x + \frac{2}{p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(h_2 - h_1) \cdot \cos(np)}{n} \cdot \text{sen}\left(\frac{np x}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{T \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot t}{S \cdot l^2}\right) \right] \quad (1.2)$$

## 2. EFECTO DE LAS MAREAS SOBRE EL NIVEL DEL AGUA SUBTERRÁNEA

En acuíferos costeros en contacto con el océano, fluctuaciones sinusoidales del agua subterránea ocurren en respuesta a las mareas. En este caso el aumento del nivel del agua de mar por efecto de las mareas se traduce en un aumento del nivel de agua en el acuífero, el que se traslada hacia el interior del sistema acuífero a una velocidad que descende paulatinamente debido a la pérdida de carga dentro del medio acuífero. La Figura 2.1 ilustra gráficamente el efecto señalado.

**Figura 2.1**  
**Efecto de la Marea sobre el Nivel Piezométrico**



Por simplicidad consideremos un sistema de flujo unidimensional en un acuífero confinado como el que se muestra en la Figura 2.1. La ecuación diferencial que gobierna el flujo se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

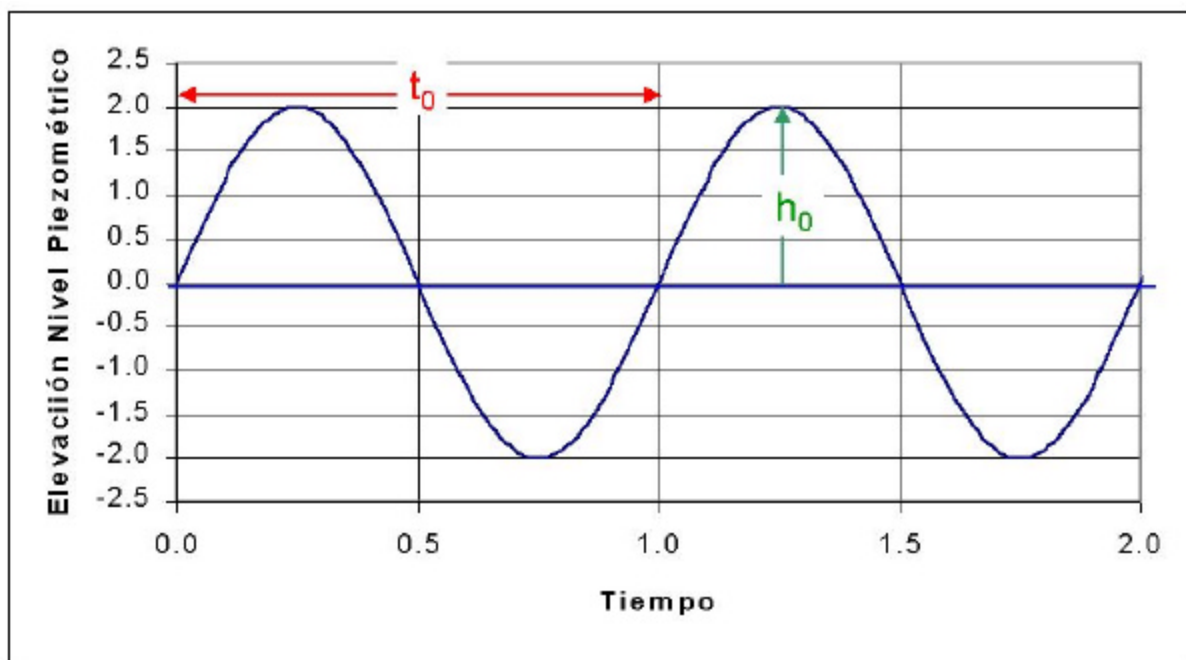
donde  $h$  es la elevación o caída neta de la superficie piezométrica con respecto al nivel medio del mar,  $x$  es la distancia medida desde el nivel del mar,  $S$  es el coeficiente de almacenamiento del acuífero,  $T$  es la transmisibilidad y  $t$  es el tiempo.

Supongamos que la marea se puede describir por una amplitud  $h_0$  (máxima elevación con respecto al nivel del mar) y un período de marea igual a  $t_0$ , tal como se muestra en la Figura 2.2. De esta manera, la condición de borde para describir el efecto de la marea queda dada por la siguiente expresión:

$$h(x=0, t) = h_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.2)$$

con

**Figura 2.2**  
**Representación del Efecto de la Marea**



$$w = \frac{2 \cdot p}{t_0}$$

Para efectos prácticos existe una distancia desde la orilla del mar en la cual el efecto de la marea no se siente en ningún momento. Esta condición se puede escribir como:

$$h(x \rightarrow \infty, t) = 0 \quad (2.3)$$

Finalmente podemos indicar que inicialmente el acuífero se encuentra sin perturbaciones, estos es:

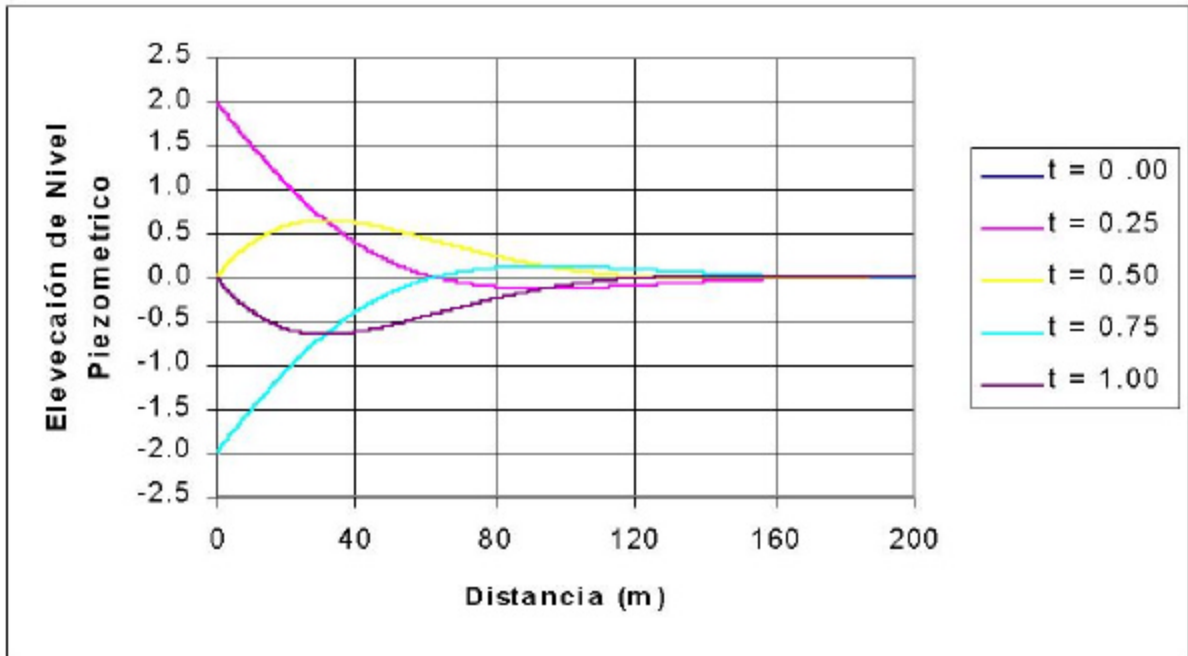
$$h(x, t = 0) = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación diferencial (2.1), sujeta a las condiciones de borde (2.2) y (2.3), junto a la condición inicial (2.4) puede ser resuelta mediante la técnica de transformadas de Laplace y entrega la siguiente solución:

$$h(x, t) = h_0 \cdot \exp\left(-x \cdot \sqrt{\frac{p \cdot S}{t_0 \cdot T}}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot p \cdot t}{t_0} - x \cdot \sqrt{\frac{p \cdot S}{t_0 \cdot T}}\right) \quad (2.5)$$

Si consideramos un conjunto de parámetros arbitrario ( $T = 100 \text{ m}^2/\text{día}$ ,  $S = 0.02$ , y  $t_0 = 1 \text{ día}$ ) podemos representar gráficamente la solución entregada por la ecuación (2.5), la que se presenta en la Figura 2.3 en lo que respecta a un gráfico con la distancia y en función del tiempo en la Figura 2.4.

**Figura 2.3**  
**Nivel Piezométrico en función de la Distancia**



**Figura 2.4**  
**Nivel Piezométrico en función del Tiempo**

