CI66J

CI66J/CI71T
MODELACION DE AGUAS SUBTERRANEAS

ELABORACION DE UN MODELO NUMERICO

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS
- IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO

CI66J

¿QUÉ ES UN MODELO NUMÉRICO?

- Modelo es un herramienta diseñada para representar una versión simplificada de la realidad.

- Modelo Numérico está compuesto de:
  - Modelo matemático (simplificado)
  - Condiciones de borde e iniciales
  - Esquema de discretización (MDF o MEF)
  - Malla o grilla de discretización

CI66J

¿QUE ES UN MODELO NUMERICO DE AGUA SUBTERRANEA?

MATEMATICO → ANALITICO

MATEMATICO → CUASI ANALITICO

MATEMATICO → NUMERICO

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}\right)=S_S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}$$

CI66J

VALIDACION DEL CODIGO NUMERICO

ECUACIONES DIFERENCIALES

MODELO MATEMATICO

MEF o MDF →

ECUACIONES ALGEBRAICAS

MODELO DISCRETO

SOLUCION ANALITICA ↔ SOLUCION APROXIMADA

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS
- IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

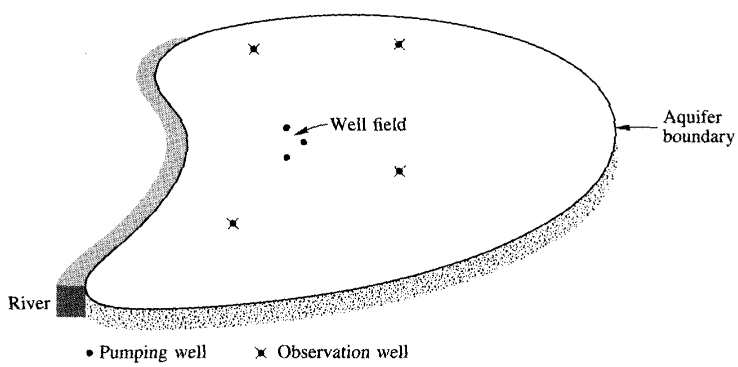
EJEMPLO

CI66J

MALLA DE DISCRETIZACION

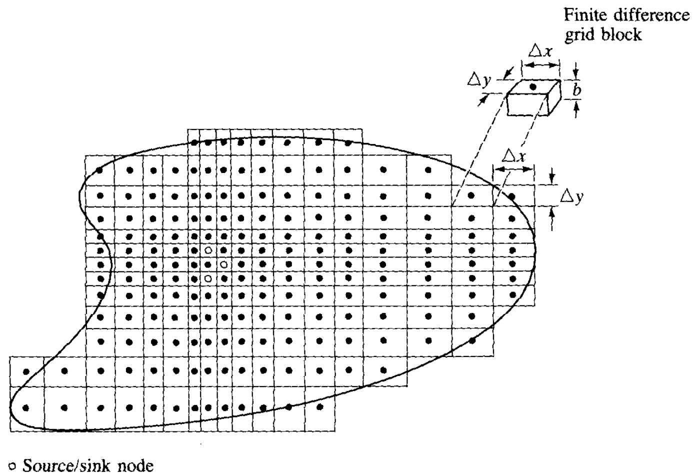
- Es la manera de pasar de la geometría del sistema real a su representación numérica.
- Está formada por nodos (en los cuales se conocen las variables de estado) y elementos (en los cuales se conocen parámetros y propiedades del sistema hidrogeológico).

CI66J



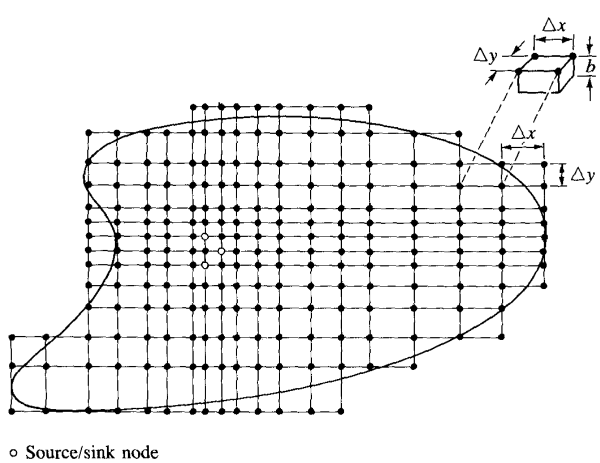
MODELO CONCEPTUAL

CI66J



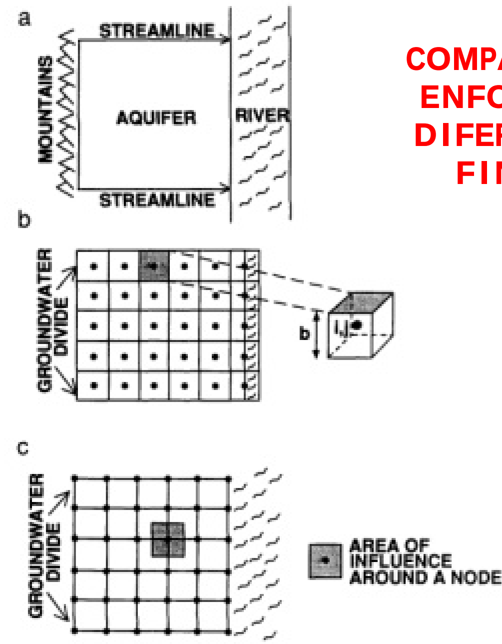
MALLA DIFERENCIAS FINITAS CENTRADA EN ELEMENTO

CI66J



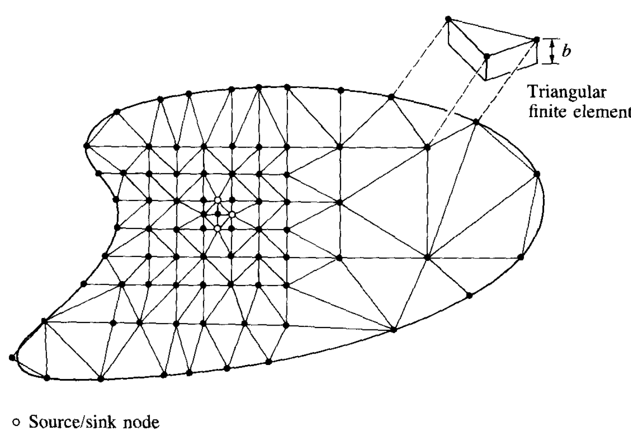
MALLA DIFERENCIAS FINITAS CON NODO EN VERTICE

CI66J



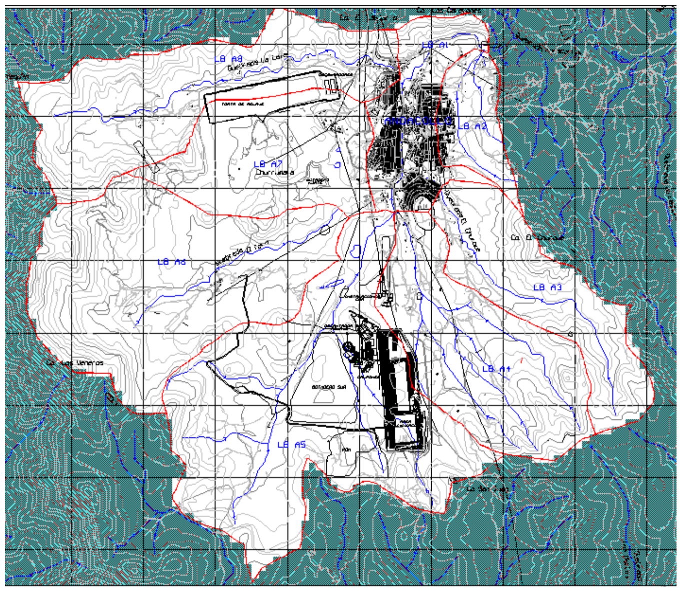
COMPARACION ENFOQUE DE DIFERENCIAS FINITAS

CI66J

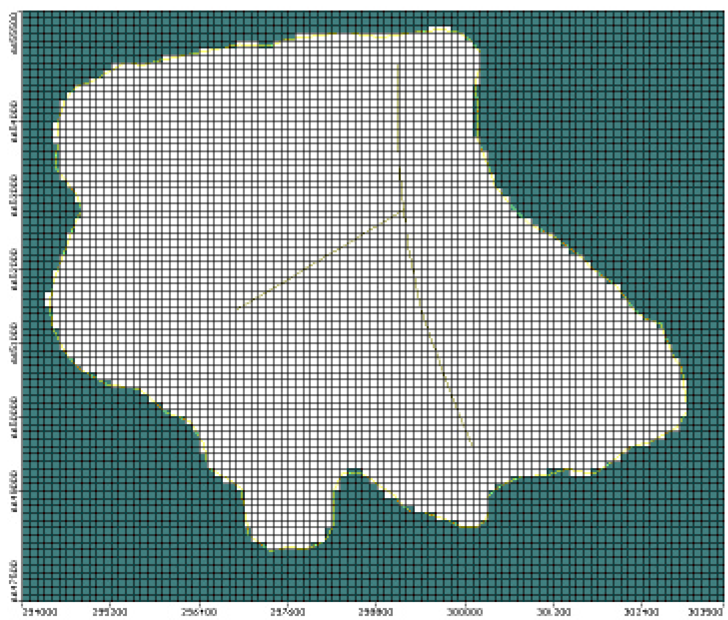


MALLA ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES

CI66J

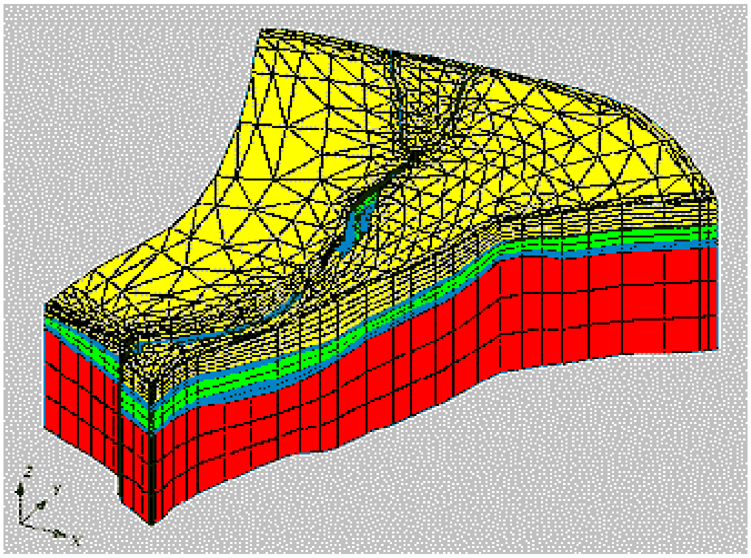


CI66J



CI66J

EF



CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

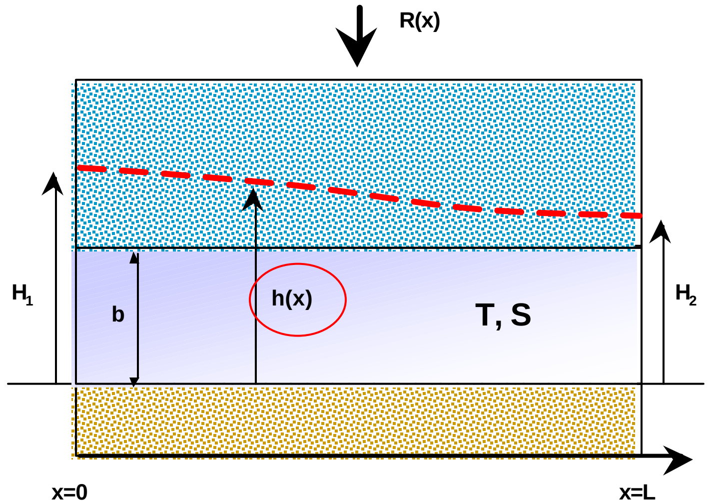
- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

CI66J



CI66J

Utilizando la ley de Darcy podemos desarrollar la ecuación de balance de masas en 1D para escribir:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}$$

En el caso de incorporar una recarga sobre la parte superior del suelo se tiene la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - R(x)}$$

Si consideramos ahora una situación de régimen permanente se puede escribir:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R(x)}$$

CI66J

PROBLEMA TIPO

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{h(x=0)=H_1} \\ \\ \boxed{h(x=L)=H_2} \end{array}\right\}$$

CONDICIONES DE BORDE

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS
- IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO

CI66J

PROBLEMA TIPO

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{h(x=0) = H_1} \\ \\ \boxed{h(x=L) = H_2} \end{array}\right\} \text{CONDICIONES DE BORDE}$$

CI66J

Si consideramos que la conductividad hidráulica, K_X, el espesor del acuífero, b, y la recarga, R, son constantes en el espacio:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R} \qquad \boxed{T = K_x \cdot b}$$

Lo que se puede escribir con diferenciales totales como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(T \cdot \frac{dh}{dx}\right) = -R}$$

Integrando una vez se tiene:

$$\boxed{T \cdot \frac{dh}{dx} = -R \cdot x + c_1}$$

CI66J

Reordenando se tiene:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{R}{T}\cdot x + c_1$$

Lo que se puede integrar nuevamente para obtener:

$$h(x) = -\frac{R}{T}\cdot\frac{x^2}{2} + c_1\cdot x + c_2$$

Incorporando las condiciones de borde:

$$h(x=0) = -\frac{R}{T}\cdot\frac{0^2}{2} + c_1\cdot 0 + c_2 \Rightarrow H_1 = c_2$$

$$h(x=L) = -\frac{R}{T}\cdot\frac{L^2}{2} + c_1\cdot L + c_2 \Rightarrow H_2 = -\frac{R}{T}\cdot\frac{L^2}{2} + c_1\cdot L + c_2$$

CI66J

Resolviendo para c_1 y c_2 se tiene:

$$c_2 = H_1$$

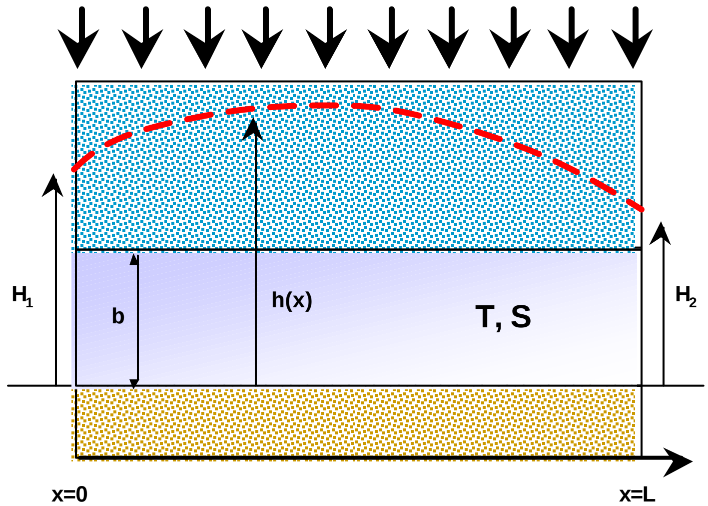
$$c_1 = \frac{H_2 - H_1}{L} + \frac{R\cdot L}{2\cdot T}$$

Finalmente podemos reemplazar las constantes para obtener:

$$h(x) = -\frac{R}{T}\cdot\frac{x^2}{2} + \left(\frac{H_2 - H_1}{L} + \frac{R\cdot L}{2\cdot T}\right)\cdot x + H_1$$

$$\boxed{h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L}\cdot x + \frac{R}{2\cdot T}\cdot x\cdot(L - x)}$$

CI66J



$$\boxed{h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L}\cdot x + \frac{R}{2\cdot T}\cdot x\cdot(L - x)}$$

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

CI66J

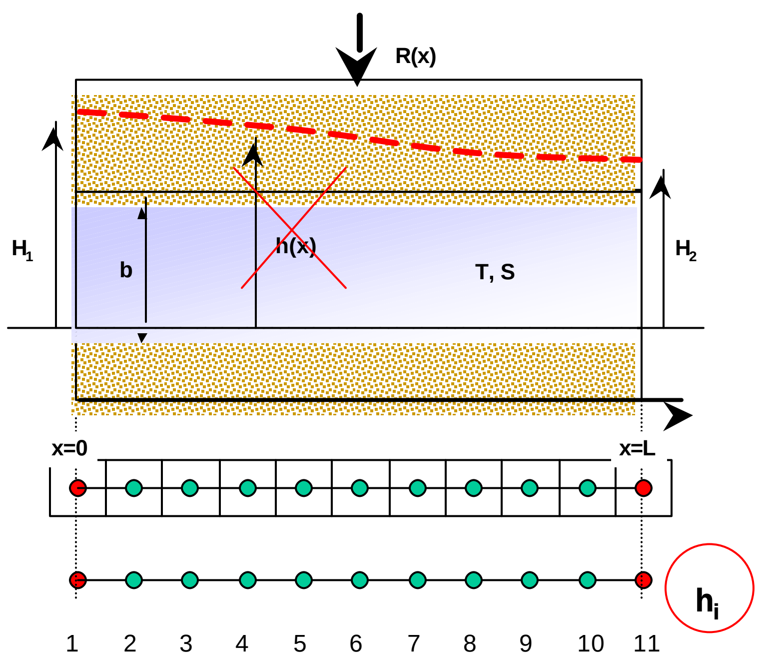
PROBLEMA TIPO

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(T\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-R} \Rightarrow \boxed{T\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-R}$$

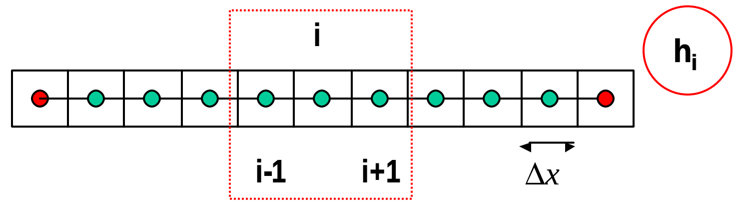
$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=-\frac{R}{T}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{h(x=0)=H_1}\\ \boxed{h(x=L)=H_2}\end{array}\right\}\text{CONDICIONES DE BORDE}$$

CI66J

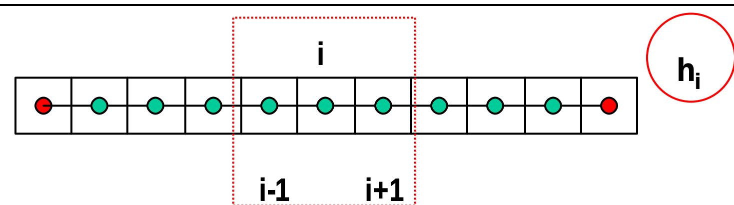


CI66J



$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_i \quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_i \cong \dfrac{h_{i+1}-h_i}{\Delta x} & \textbf{Aproximación hacia adelante} \\[2ex] \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_i \cong \dfrac{h_i-h_{i-1}}{\Delta x} & \textbf{Aproximación hacia atrás} \\[2ex] \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_i \cong \dfrac{h_{i+1}-h_{i-1}}{2\cdot\Delta x} & \textbf{Aproximación central} \end{cases}$$

CI66J



$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i \cong \frac{\left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_i - \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_{i-1}}{\Delta x} = \frac{\left(\dfrac{h_{i+1}-h_i}{\Delta x}\right) - \left(\dfrac{h_i-h_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i \cong \frac{h_{i-1}-2\cdot h_i+h_{i+1}}{\Delta x^2}}$$

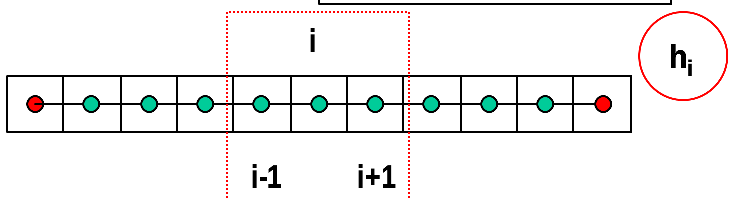
CI66J

PROBLEMA TIPO

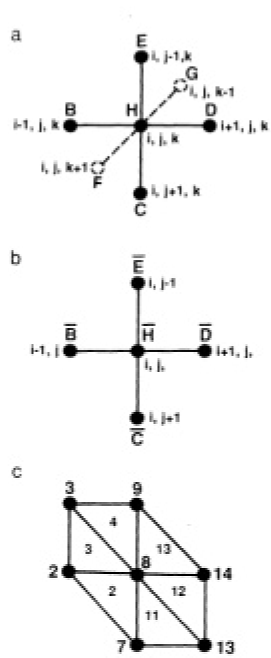
$$\boxed{T \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -R}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{R}{T}} \Rightarrow \boxed{\frac{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1}}{\Delta x^2} \cong -\frac{R}{T}}$$

$$\boxed{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1} \cong -\frac{R}{T} \cdot \Delta x^2}$$



CI66J



CELULAS DE DIFERENCIAS FINITAS

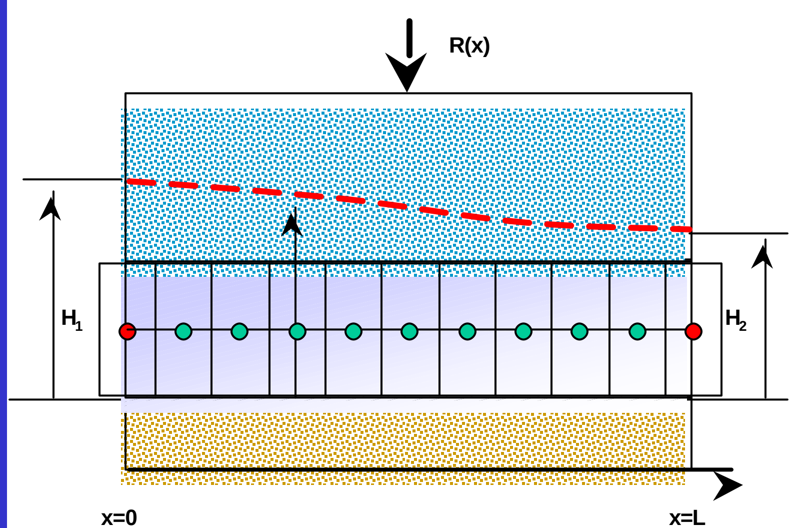
CI66J

INTRODUCCION
MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION
DERIVACION PROBLEMA TIPO
SOLUCION ANALITICA
SOLUCION NUMERICA
- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION
- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

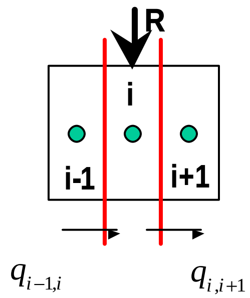
CI66J



$$\boxed{q = K \cdot i \cdot A}$$

CI66J

Utilizar Ley de Darcy. para calcular caudales de agua subterránea entre un elemento y el siguiente:



$$\boxed{q = K \cdot i \cdot A}$$

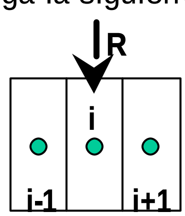
$$\boxed{q_{i-1,i} = K_{i-1,i} \cdot \frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta x} \cdot b \cdot 1}$$

$$\boxed{q_{i,i+1} = K_{i,i+1} \cdot \frac{h_i - h_{i+1}}{\Delta x} \cdot b \cdot 1}$$

$$\boxed{q_R = R \cdot \Delta x \cdot 1}$$

CI66J

Un balance de masas sobre el elemento i nos entrega la siguiente expresión:



$$\boxed{q_{i-1,i} + q_R = q_{i,i+1}}$$

$$\boxed{K_{i-1,i} \cdot \frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta x} \cdot b \cdot 1 + R \cdot \Delta x = K_{i,i+1} \cdot \frac{h_i - h_{i+1}}{\Delta x} \cdot b \cdot 1}$$

Luego se define la conductancia C como:

$$\boxed{C = K \cdot \frac{b \cdot 1}{\Delta x}}$$

CI66J

La expresión del balance de masas sobre el elemento i se puede escribir reducida como:

$$\boxed{K_{i-1,i}\cdot\frac{h_{i-1}-h_i}{\Delta x}\cdot b\cdot 1+R\cdot\Delta x=K_{i,i+1}\cdot\frac{h_i-h_{i+1}}{\Delta x}\cdot b\cdot 1}$$

$$\boxed{C_{i-1,i}\cdot(h_{i-1}-h_i)+R\cdot\Delta x=C_{i,i+1}\cdot(h_i-h_{i+1})}$$

Lo cual se resume como:

$$\boxed{C_{i-1,i}\cdot h_{i-1}+(C_{i-1,i}+C_{i,i+1})\cdot h_i+C_{i,i+1}\cdot h_{i+1}=-R\cdot\Delta x}$$

Si el medio poroso es homogéneo:

$$\boxed{C_{i-1,i}=C_{i,i+1}=K\cdot\frac{b\cdot 1}{\Delta x}=\frac{T}{\Delta x}}$$

CI66J

La última expresión permite escribir la ecuación de balance como:

$$\boxed{C_{i-1,i}\cdot h_{i-1}+(C_{i-1,i}+C_{i,i+1})\cdot h_i+C_{i,i+1}\cdot h_{i+1}=-R\cdot\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{T}{\Delta x}\cdot h_{i-1}+\left(\frac{T}{\Delta x}+\frac{T}{\Delta x}\right)\cdot h_i+\frac{T}{\Delta x}\cdot h_{i+1}=-R\cdot\Delta x}$$

Lo cual se resume finalmente como:

$$\boxed{h_{i-1}-2\cdot h_i+h_{i+1}\cong-\frac{R}{T}\cdot\Delta x^2}$$

Que es igual a la expresión derivada anteriormente.

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

CI66J

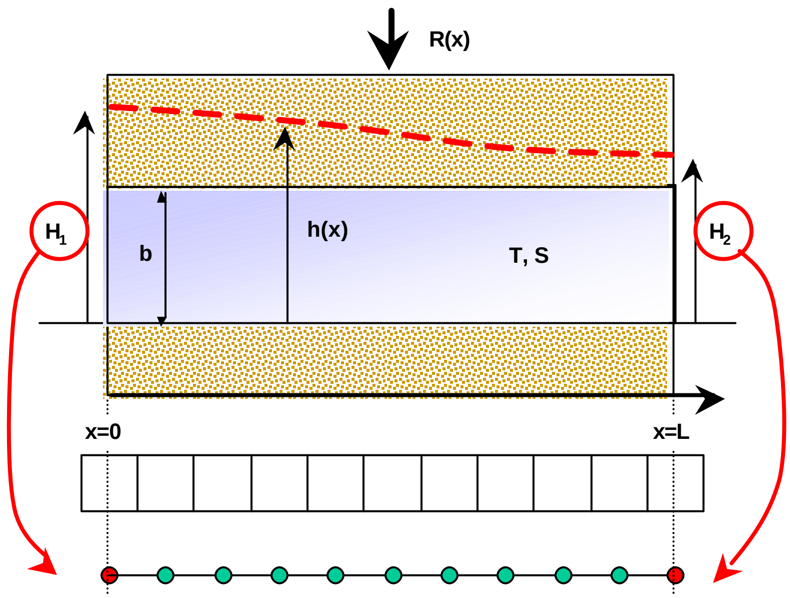
DIRICHLET

Condición de borde de primer tipo. Corresponde al valor de la variable de estado que es conocida en algún sector de la zona modelada. Esto se traduce como nudos de la malla con información conocida.

$$\boxed{h(x = x_0) = h_0}$$

$$\boxed{h_i = h_0}$$

CI66J



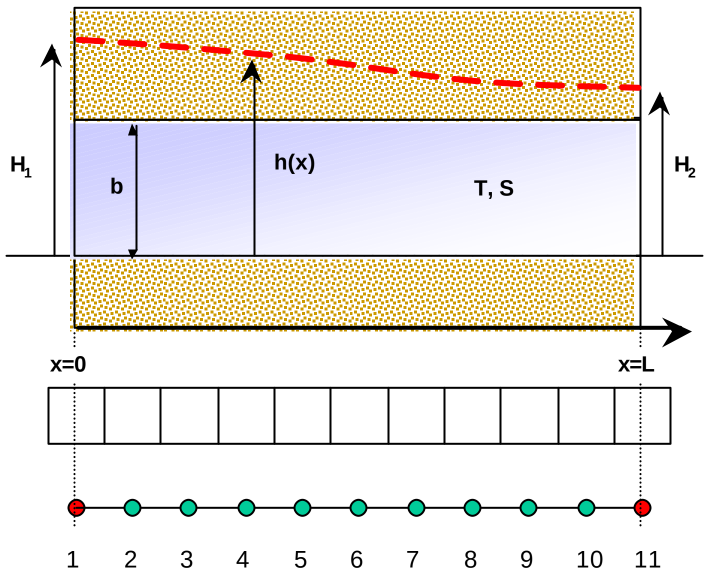
CI66J

INTRODUCCION
MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION
DERIVACION PROBLEMA TIPO
SOLUCION ANALITICA
SOLUCION NUMERICA
- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION
- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

CI66J



CI66J

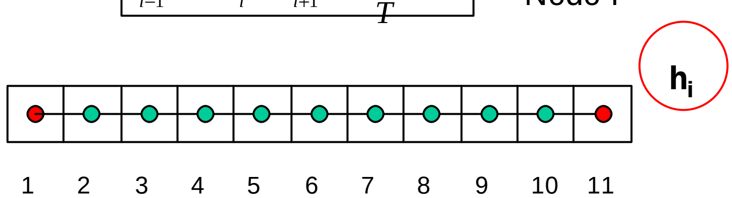
PROBLEMA TIPO

$$\boxed{T \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -R}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{R}{T}} \Rightarrow \boxed{\frac{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1}}{\Delta x^2} \cong -\frac{R}{T}}$$

$$\boxed{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1} \cong -\frac{R}{T} \cdot \Delta x^2}$$

Nodo i



CI66J

MODELO NUMERICO

Existen dos formas de resolver este problema (es decir determinar el valor de h_i para i desde 1 hasta 11).

ENFOQUE DIRECTO

Construir un sistema de ecuaciones utilizando la aproximación escrita anteriormente.

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO

Utilizar la aproximación anterior para desarrollar un esquema de cálculo iterativo.

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

Para nudos 2 al 10 se tiene:

2 $h_1 - 2\cdot h_2 + h_3 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

3 $h_2 - 2\cdot h_3 + h_4 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

4 $h_3 - 2\cdot h_4 + h_5 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

5 $h_4 - 2\cdot h_5 + h_6 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

6 $h_5 - 2\cdot h_6 + h_7 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

7 $h_6 - 2\cdot h_7 + h_8 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

8 $h_7 - 2\cdot h_8 + h_9 \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

9 $h_8 - 2\cdot h_9 + h_{10} \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

10 $h_9 - 2\cdot h_{10} + h_{11} \cong -R\cdot\Delta x^2/T$

$$\boxed{h_{i-1} - 2\cdot h_i + h_{i+1} \cong -\frac{R}{T}\cdot\Delta x^2}$$

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

Para nudos 1 y 11 se tiene:

1 $\boxed{h_1 = H_1}$

2 $\boxed{h_1 - 2\cdot h_2 + h_3 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

3 $\boxed{h_2 - 2\cdot h_3 + h_4 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

4 $\boxed{h_3 - 2\cdot h_4 + h_5 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

5 $\boxed{h_4 - 2\cdot h_5 + h_6 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

6 $\boxed{h_5 - 2\cdot h_6 + h_7 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

7 $\boxed{h_6 - 2\cdot h_7 + h_8 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

8 $\boxed{h_7 - 2\cdot h_8 + h_9 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

9 $\boxed{h_8 - 2\cdot h_9 + h_{10} \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

10 $\boxed{h_9 - 2\cdot h_{10} + h_{11} \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

11 $\boxed{h_{11} = H_2}$

$$\boxed{h_1 = H_1}$$

$$\boxed{h_{11} = H_2}$$

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

Al combinar todas las ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ H_2 \end{Bmatrix}$$

Al resolver se obtiene una solución para {h}.

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

Al combinar los N nudos y escribir el problema en términos o forma matricial se tendrá un sistema del tipo:

$$\boxed{[A]\cdot\{h\}=\{b\}}$$

Si se invierte la matriz A se obtiene una solución para la variable de estado h:

$$\boxed{\{h\}=[A]^{-1}\cdot\{b\}}$$

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

La inversión de la matriz A no es una tarea simple. Afortunadamente en este tipo de problemas la matriz tiene algunas características que la hacen más fácil de invertir: definida positiva y simétrica.

METODOS DE INVERSION DIRECTA:

- Inversión Gaussiana
- Algoritmo de Thomas

METODOS DE INVERSION ITERATIVOS:

- Strongly Implicit Procedure Package (SIP)
- Slice-Succesive Overrelaxation Package (SOR)
- Preconditioned Conjugate Gradient (PCG)

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

Comparación de tiempos de ejecución de problemas tipo utilizando dos métodos tradicionales: cálculo directo (DE4) y con precondicionamiento (PCG2).

	PROBLEMA	ESTRATOS, FILAS Y COLUMNAS	TIEMPO (seg)	
			DE4	PCG2
A	Estado Estacionario, Lineal	2, 20, 30	2.3	2.3
B	Estado Estacionario, No lineal	2, 20, 30	8.2	8.2
C	Transiente, Lineal, Paso de tiempo constante	2, 20, 30	6.9	6.9
D	Transiente, No lineal	2, 20, 30	61.0	30.4
E	Estado Estacionario, Lineal	4, 40, 60	226.5	49.2

WorkStation

CI66J

ENFOQUE DIRECTO:

Comparación de tiempos de ejecución de problemas tipo utilizando dos métodos tradicionales: cálculo directo (DE4) y con precondicionamiento (PCG2).

	PROBLEMA	ESTRATOS, FILAS Y COLUMNAS	TIEMPO (seg)	
			DE4	PCG2
A	Estado Estacionario, Lineal	2, 20, 30	1.66	1.43
B	Estado Estacionario, No lineal	2, 20, 30	3.54	1.93
C	Transiente, Lineal, Paso de tiempo constante	2, 20, 30	13.05	4.14
D	Transiente, No lineal	2, 20, 30	21.11	7.15
E	Estado Estacionario, Lineal	4, 40, 60	136.79	9.53

PC

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

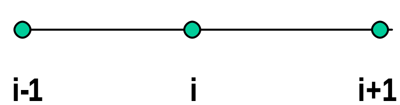
EJEMPLO

CI66J

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

Se toma la expresión general para generar un algoritmo de convergencia.

$$\boxed{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1} = -\frac{R}{T} \cdot \Delta x^2}$$



$$\boxed{h_i = \frac{1}{2} \cdot \left(h_{i-1} + h_{i+1}\right) + \frac{R \cdot \Delta x^2}{2 \cdot T}}$$

CI66J

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

JACOBI

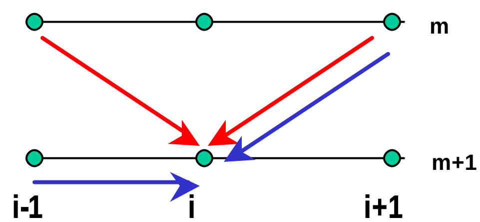
$$\boxed{h_i^{m+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(h_{i-1}^{m} + h_{i+1}^{m}\right) + \frac{R\cdot\Delta x^2}{2\cdot T}}$$

GAUSS-SEIDEL

$$\boxed{h_i^{m+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(h_{i-1}^{m+1} + h_{i+1}^{m}\right) + \frac{R\cdot\Delta x^2}{2\cdot T}}$$

$$\boxed{h_i^0 = 0 \qquad \forall\, i}$$

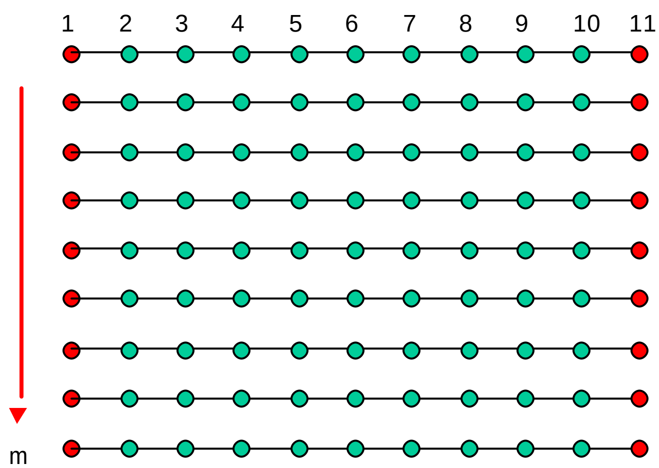
$$\boxed{h_1 = H_1} \qquad \boxed{h_{11} = H_2}$$



CI66J

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

$$\boxed{h_1 = H_1} \qquad \boxed{h_{11} = H_2}$$



CI66J

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

	NUDOS										
ITER	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0	20.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	20.0
1	20.0	10.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10.1	20.0
2	20.0	10.2	5.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	5.2	10.2	20.0
3	20.0	12.7	5.3	2.8	0.3	0.3	0.3	2.8	5.3	12.7	20.0
4	20.0	12.7	7.9	2.9	1.7	0.4	1.7	2.9	7.9	12.7	20.0
5	20.0	14.0	7.9	4.9	1.7	1.8	1.7	4.9	7.9	14.0	20.0
6	20.0	14.1	9.5	4.9	3.4	1.8	3.4	4.9	9.5	14.1	20.0
7	20.0	14.9	9.6	6.6	3.5	3.5	3.5	6.6	9.6	14.9	20.0
8	20.0	14.9	10.8	6.6	5.1	3.6	5.1	6.6	10.8	14.9	20.0
9	20.0	15.5	10.9	8.1	5.2	5.2	5.2	8.1	10.9	15.5	20.0
10	20.0	15.5	11.9	8.1	6.8	5.3	6.8	8.1	11.9	15.5	20.0
11	20.0	16.0	11.9	9.4	6.8	6.9	6.8	9.4	11.9	16.0	20.0
12	20.0	16.1	12.8	9.5	8.2	6.9	8.2	9.5	12.8	16.1	20.0
13	20.0	16.5	12.9	10.6	8.3	8.3	8.3	10.6	12.9	16.5	20.0
14	20.0	16.5	13.7	10.7	9.6	8.4	9.6	10.7	13.7	16.5	20.0
15	20.0	16.9	13.7	11.7	9.6	9.7	9.6	11.7	13.7	16.9	20.0
16	20.0	17.0	14.4	11.8	10.8	9.7	10.8	11.8	14.4	17.0	20.0
17	20.0	17.3	14.5	12.7	10.9	10.9	10.9	12.7	14.5	17.3	20.0
18	20.0	17.3	15.1	12.8	11.9	11.0	11.9	12.8	15.1	17.3	20.0
19	20.0	17.7	15.2	13.6	12.0	12.0	12.0	13.6	15.2	17.7	20.0
20	20.0	17.7	15.7	13.7	12.9	12.1	12.9	13.7	15.7	17.7	20.0

CI66J

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

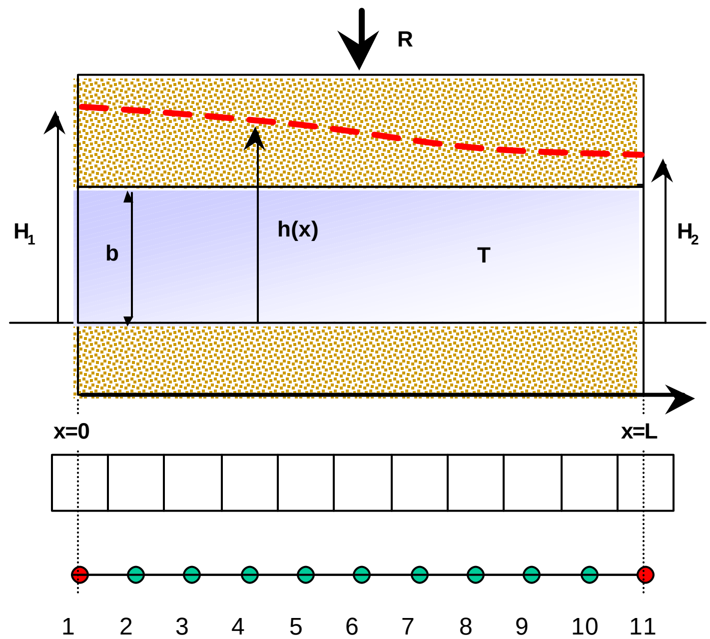
- **IMPLEMENTACION DIFERENCIAS FINITAS**
- **IMPLEMENTACION BALANCE DE MASAS**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

CI66J



CI66J

NUDOS 2 A 10

JACOBI

$$\boxed{h_i^{m+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(h_{i-1}^{m} + h_{i+1}^{m}\right) + \frac{R\cdot\Delta x^2}{2\cdot T}}$$

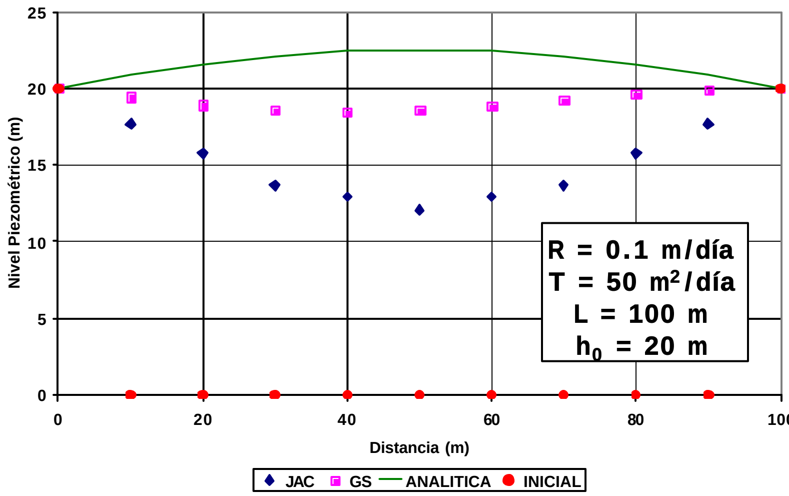
GAUSS-SEIDEL

$$\boxed{h_i^{m+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(h_{i-1}^{m+1} + h_{i-1}^{m}\right) + \frac{R\cdot\Delta x^2}{2\cdot T}}$$

NUDOS 1 Y 11

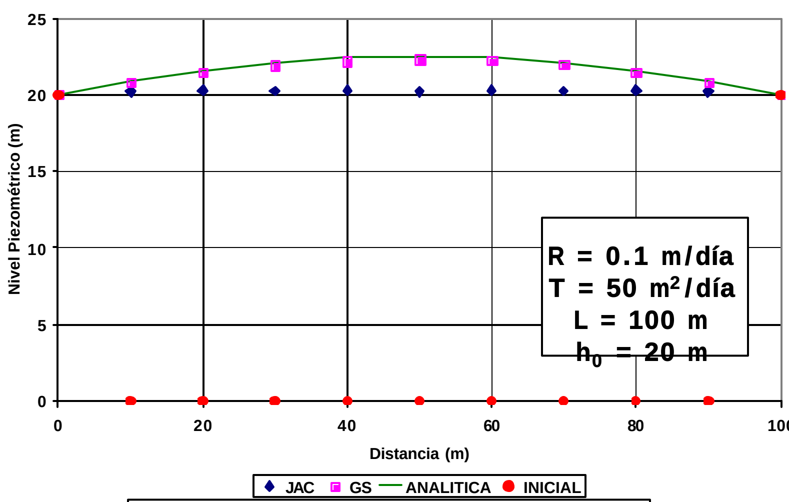
$$\boxed{h_1 = H_1} \qquad \boxed{h_{11} = H_2}$$

CI66J



$$h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x + \frac{R}{2 \cdot T} \cdot x \cdot (L - x)$$

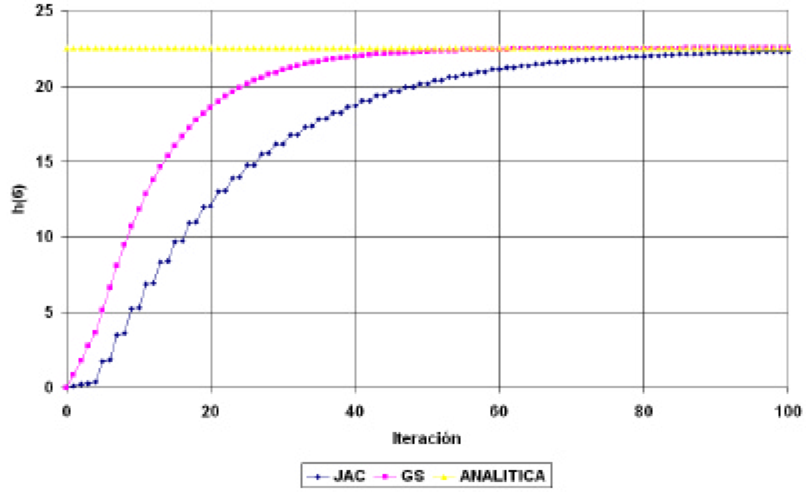
CI66J



$$h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x + \frac{R}{2 \cdot T} \cdot x \cdot (L - x)$$

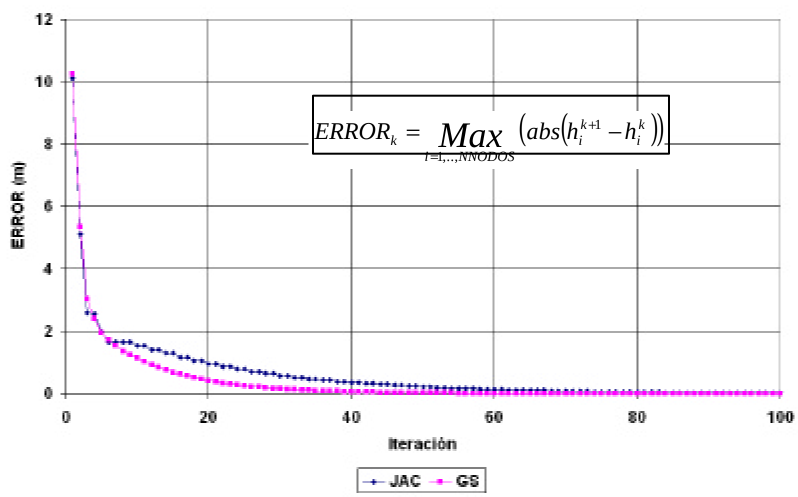
CI66J

COMPARACION METODOS DE SOLUCION:



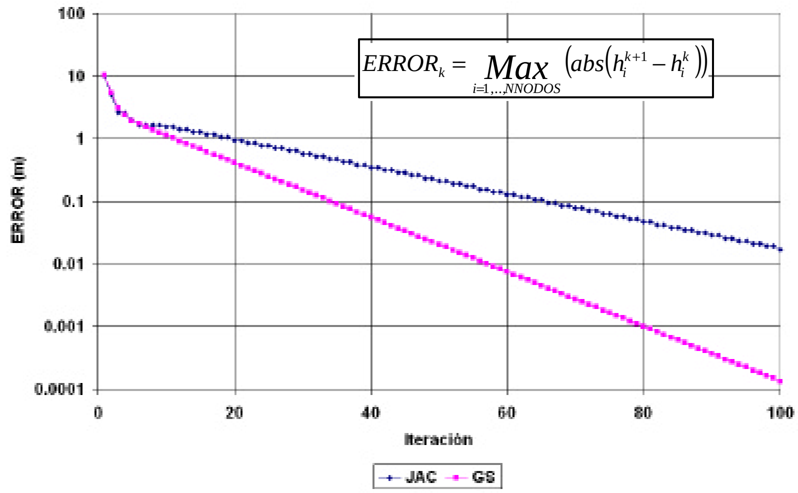
CI66J

COMPARACION METODOS DE SOLUCION:



CI66J

COMPARACION METODOS DE SOLUCION:



$$ERROR_k = \underset{i=1,..,NNODOS}{Max}\left(abs\left(h_i^{k+1} - h_i^k\right)\right)$$