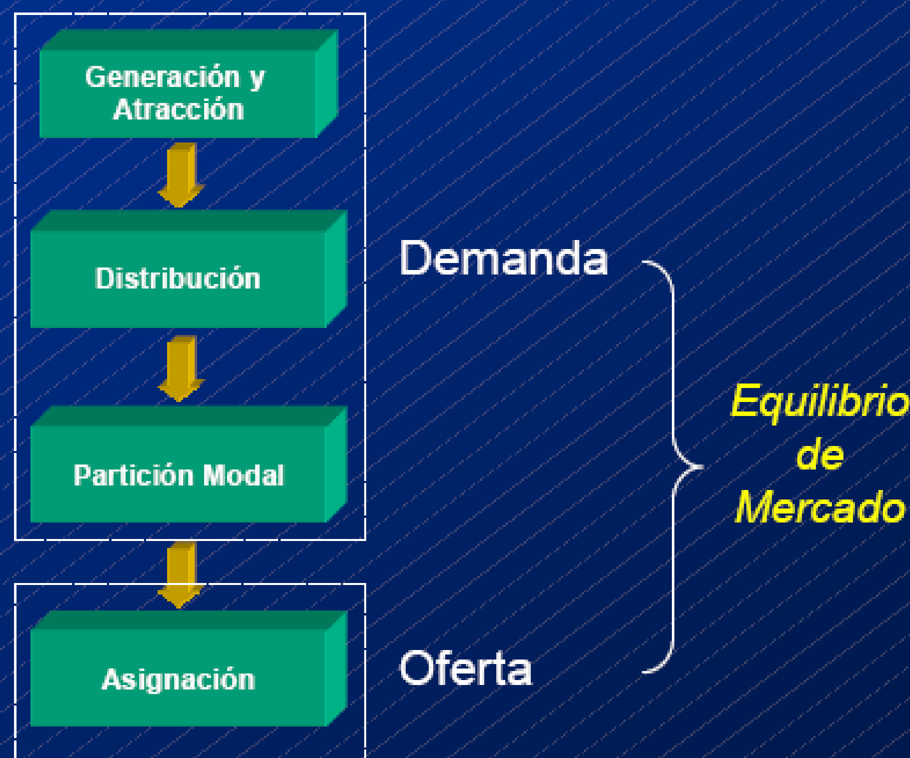
EQUILIBRIO OFERTA-DEMANDA EN REDES DE TRANSPORTE



CONTENIDO PRESENTACIÓN

Parte I: Equilibrio en Redes con Demanda Variable

Parte II: Asignación-Distribución conjuntas con modelo de distribución doblemente acotado

Parte I: Equilibrio en Redes con Demanda Variable

I.1 Introducción

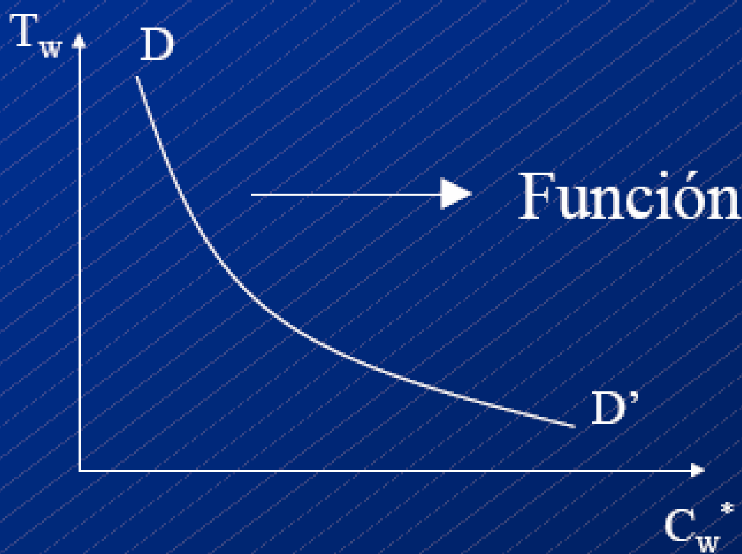
Todos los problemas de equilibrio de tráfico vistos hasta aquí (transporte privado y transporte público) suponen que los viajes realizados entre parejas de zonas *O/D* son fijos y conocidos.

En el caso del equilibrio de mercado, la dda. de viajes es variable. Para introducir este problema, supondremos que la dda. T_w (viajes entre el par w) es función del costo de transporte (de equilibrio) entre dicho par.

A este nivel introductorio supondremos simplemente que:

$$T_w\left(C_w^*\right) = A_w / C_w^{*b} \qquad (1)$$

(más adelante veremos funciones más realistas)



→ Función de demanda para el par *w*

La forma funcional anterior nos dice que:

- Al aumentar la congestión en la red, aumentará "el costo" de viajar en ella, lo que puede traducirse en una disminución de los viajes.

  (por ejemplo "cambios de horas de viaje", suspensión de viajes, cambios de destino, etc.)

Es importante notar que el problema general que veremos a continuación no tiene restricciones respecto a viajes generados y atraídos en las zonas. Así, generación y atracción son resultado del equilibrio en el sistema.

El enfoque secuencial clásico para determinar el "equilibrio oferta demanda" presenta como problema serio el de la inconsistencia entre los niveles de los servicios de las distintas etapas del modelo (generación, distribución, partición modal, asignación). Problema grave si existe congestión.

El enfoque secuencial requiere hacer suposiciones respecto de los niveles de servicios para resolver las primeras etapas del modelo para luego, a partir de flujos *O/D* por modo, asignados a las redes, obtener niveles de servicio correspondientes a dichos flujos. Convergencia no garantizada (si hay congestión en realidad el método no converge).

El problema que sigue consiste en encontrar, a partir de una red conocida y de funciones de demanda $T_w(C_w^*)$ los flujos de equilibrio en cada arco, sus tiempos o costos de equilibrio y los T_w que satisfacen las siguientes condiciones.

- Los costos (tiempos) de viaje de los caminos usados entre un par *O/D* dado son iguales entre sí, y además iguales o menores que los costos (tiempos) de los caminos no usados (primer principio de Wardrop).

- Los T_w obtenidos deben satisfacer las funciones de demanda. $(T_w^* = T_w(C_w^*))$

Las condiciones anteriores definen el equilibrio de usuarios con demanda variable.

I.2 Condiciones de equilibrio del problema

Para cada par w existente en la red debe cumplirse que:

$$C_p \begin{cases} = C_w^*, & si\, h_p^* > 0 \\ \geq C_w^*, & si\, h_p^* = 0 \end{cases} \quad \forall p \in P_w \qquad (2)$$

Las condiciones (2) son equivalentes a:

$$\begin{aligned} &\left(C_p - C_w^*\right)\cdot h_p^* = 0 \\ &\left(C_p - C_w^*\right) \quad \geq 0 \qquad \forall p \in P_w \end{aligned} \qquad (3)$$

$$C_w^* = g_w\left(T_w^*\right) \qquad \left(g_w = T_w^{-1} = C_w\right) \qquad (4)$$

Obviamente en el equilibrio se deberá cumplir que:

$$\sum_{p \in P_w} h_p^* = T_w\left(C_w^*\right) \qquad (5)$$

Como se cumple Wardrop (primer principio)

- Si una ruta p tiene flujo en el equilibrio $(h_p^* > 0)$
  $\Rightarrow C_p^* - C_w^* = 0$

- Si una ruta p no tiene flujo en el equilibrio $(h_p^* = 0)$
  $\Rightarrow C_p^* - C_w^* \geq 0 \wedge (h_p - h_p^*) \geq 0 \ \forall h_p \geq 0$

∴ se cumple que:

$$\left(C_p - C_w^*\right) \cdot \left(h_p - h_p^*\right) \geq 0 \quad \forall p \in P_w, h_p \geq 0 \qquad (6)$$

Sumando $\forall w$ y $\forall p \in P_w$:

$$\sum_{w} \sum_{p \in P_w} \left(C_p - C_w^*\right) \cdot \left(h_p - h_p^*\right) \geq 0 \tag{7}$$

$$\sum_{w} \sum_{p \in P_w} C_p^* \left(h_p - h_p^*\right) - \sum_{w} C_w^* \sum_{p \in P_w} \left(h_p - h_p^*\right) \geq 0 \tag{8}$$

Cuando la demanda es fija:

$$\sum_{p} h_p = \sum_{p} h_p^* = T_w$$

$\therefore$ (8) $\Rightarrow$ $$C\left(H^*\right)\cdot\left(H^*-H\right)\leq 0 \quad \forall\ H\ \ factible \tag{9}$$

lo que es equivalente a:

$$c\left(F^*\right)\cdot\left(F^*-F\right)\leq 0 \quad \forall\ F\ \ factible \tag{10}$$

Cuando la demanda es variable

$$\sum_p h_p \neq \sum_p h_p^*$$

¿Por qué?

$$\therefore \quad \sum_{w} \sum_{p \in P_w} \left(C_p - C_w^*\right) \cdot \left(h_p - h_p^*\right) \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$C\left(H^*\right) \cdot \left(H - H^*\right) - g\left(T^*\right) \cdot \left(T - T^*\right) \geq 0 \quad \forall\ H, T \ \ factible \tag{11}$$

(11) puede reescribirse como:

$$C\left(H^*\right) \cdot \left(H^* - H\right) - g\left(T^*\right) \cdot \left(T^* - T\right) \leq 0 \quad \forall\ H, T \ \ factible \tag{12}$$

Es fácil ver que partiendo de (12) se llega a las condiciones de Wardrop

Y como:

$$c\left(F^*\right)\cdot\left(F^*-F\right)-g\left(T^*\right)\cdot\left(T^*-T\right)\le 0 \quad \forall\, F,T \ \textit{factible} \qquad (13)$$

$\therefore$ Las condiciones de equilibrio del problema tratado (condiciones (3) y (4)) son equivalentes a la desigualdad variacional (13).

Sea:

$$d = \{c_1, c_2, \ldots, c_m, -g_{11}, -g_{12}, \ldots, -g_{nn}\}$$

$$v = \{f_1, f_2, \ldots, f_m, T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{nn}\}$$

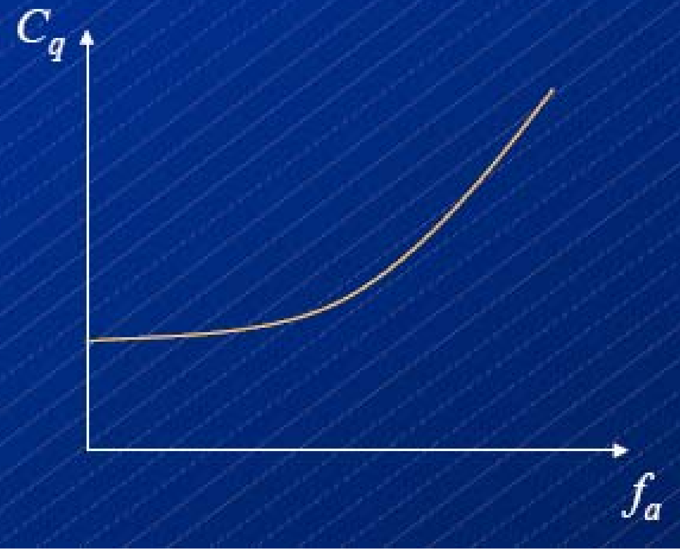
$$v^* = \{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*, T_{11}^*, T_{12}^*, \ldots, T_{nn}^*\}$$

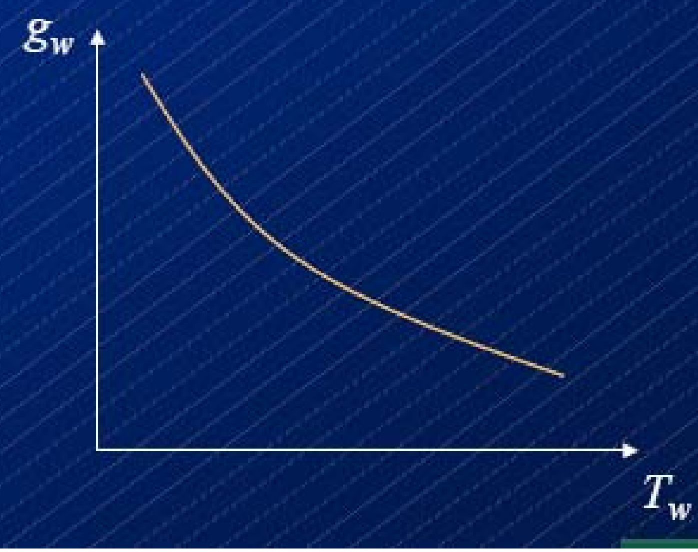
Entonces (13) puede escribirse como:

$$d(v^*) \cdot (v^* - v) \leq 0 \quad \forall v \ factible \tag{14}$$

I.3 Formulación matemática: Problema de optimización equivalente

Si las funciones de costo son diagonales ($J(\underline{c})$ diagonal) y crecientes, y si las funciones inversas de demanda son diagonales ($J(\underline{g})$ diagonal) y decrecientes:





EXISTE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EQUIVALENTE A LA DESIGUALDA VARIACIONAL (7).

Observando la expresión (14) se desprende que dicho problema de optimización (PEM) es:

$$Min\ Z = \sum_{a} \int_{0}^{f_a} c_a(x)dx - \sum_{w} \int_{0}^{T_w} g_w(y)dy \qquad (15)$$

s.a.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p \in P_w} h_p = T_w && \forall w \\ &f_a = \sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p && \forall a \\ &h_p \geq 0 && \forall p \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Es fácil ver que para las características señaladas de las funciones de costo y las funciones inversas de demanda el problema anterior tiene solución única.

¿Cómo se interpreta la función objetivo (15)?

Obsérvese que:

$$Min\ Z = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)dx - \sum_w \int_0^{T_w} g_w(y)dy$$

es lo mismo que:

$$Max\ (-Z) = \sum_w \int_0^{T_w} g_w(y)dy - \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)dx \qquad (17)$$

Parte II: Asignación-Distribución conjuntas con modelo de distribución doblemente acotado

II.1 Generalidades

- Generaciones y atracciones de viaje conocidas

$$\sum_j T_w = O_i \quad \forall i \tag{18}$$

$$\sum_i T_w = D_j \quad \forall j \tag{19}$$

En el equilibrio, los flujos de viajes O/D deben provenir de un modelo de distribución doblemente acotado, basado en la maximización de la entropía.

Adicionalmente esos flujos *O/D* (T_w) una vez asignados sobre la red deben producir flujos en los arcos y en las rutas que cumplan con el primer principio de Wardrop. (los costos de equilibrio C_w^* introducidos en el modelo de distribución producirán los T_w anteriores).

Recordemos la forma general del modelo de distribución doblemente acotado.

$$T_w = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta C_w} \tag{20}$$

donde:

$$A_i = \left[\sum_j B_j D_j e^{-\beta C_w} \right]^{-1} \quad \forall i \tag{21}$$

$$B_j = \left[\sum_i A_i O_i e^{-\beta C_w} \right]^{-1} \quad \forall j \tag{22}$$

Ojo: Recordar que dado un conjunto de valores de los costos de viaje entre pares $O/D, \{C_w\}$ o $\{u_w\}$, se deben calcular los factores de balanceo A_i, B_j / $\forall i$, $\forall j$.

II.2 El modelo combinado

i. Formulación

Veamos antes los problemas por separado:

Asignación
(Primer principio Wardrop)

$$MinZ_1 = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)dx$$

$$\{f_a, h_p\}$$

$$s.a. \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall w \quad (u_{wi})$$

$$f_a = \sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p \qquad \forall a$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall p \in P$$

Distribución doblemente acotado
(maximización entropía)

$$MinZ_2 = \sum_w T_w(\ln T_w - 1)$$

$$\{T_w\}$$

$$s.a. \quad \sum_j T_w = O_i \qquad \forall i \quad (\mu_i)$$

$$\sum_i T_w = D_j \qquad \forall j \quad (\lambda_j)$$

$$\sum_w u_w T_w = C_t \qquad (\beta)$$

Ahora, tenemos que poner estos dos problemas en uno solo tal que sus condiciones de primer orden cumplan con:

a) Distribución doblemente acotada de maximización de entropía

b) Elecciones de rutas en la red $\Rightarrow$ primer principio de Wardrop

Recuérdese que el problema de distribución también puede expresarse en términos de una función objetivo:

$$Min Z_2 = \sum_w u_w T_w + \frac{1}{\beta} \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1 \right)$$

eliminándose la última restricción

Es fácil ver que el siguiente problema único, cumple simultáneamente con las condiciones de equilibrio de los dos anteriores:

$$\underset{\{f_a, h_p, T_w\}}{Min} Z = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)dx + \frac{1}{\beta}\sum_w T_w(\ln T_w - 1) \qquad (23)$$

$$s.a. \quad \sum_j T_w = O_i \qquad \forall i \quad (\mu_i) \qquad (24)$$

$$\sum_i T_w = D_j \qquad \forall j \quad (\lambda_j) \qquad (25)$$

$$\sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall w \quad (u_{wi}) \qquad (26)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p \qquad \forall a \qquad (27)$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall p \in P \qquad (28)$$

De los análisis de las condiciones de primer orden de los problemas individuales (de la pagina anterior) se ve que en el Lagrangeano L, con el primer término de (23) y la restricción (26) se obtendrá en el equilibrio las condiciones de Wardrop (primer principio)

Por otro lado, con el segundo término de (23) y las restricciones (24), (25) y (26) se obtendrá el modelo de distribución deseado.

El Lagrangeano correspondiente al problema anterior es:

$$L = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)dx + \frac{1}{\beta}\sum_w T_w(\ln T_w - 1) + \sum_w u_w\left(T_w - \sum_{p\in P_w} h_p\right) +$$

$$+ \sum_i \mu_i\left(O_i - \sum_j T_w\right) + \sum_j \lambda_j\left(D_j - \sum_i T_w\right)$$

(4.29)

donde u_w, μ_i, λ_j son los multiplicadores de Lagrange de las restricciones (24), (25) y (26).

Es fácil ver que derivando L respecto al flujo en una ruta p, se obtienen las condiciones de equilibrio de Wardrop (óptimo de usuarios) sobre la red. Por otro lado, las derivadas respecto de las variables u_w, μ_i, λ_j, nos indican que en el óptimo se cumplen las restricciones (24), (25) y (26).

Por otro lado, en el óptimo $\frac{\partial L}{\partial T_w} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial T_w} = \frac{1}{\beta}\ln T_w + u_w - \mu_i - \lambda_j = 0 \qquad (4.30)$$

$$T_w = e^{-\beta\left(u_w - \lambda_j - \mu_i\right)} \quad \forall w \qquad (4.31)$$

Lo que como ya se ha visto es equivalente a:

$$T_w = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta C_w} \qquad (4.32)$$

EQUILIBRIO OFERTA-DEMANDA EN REDES DE TRANSPORTE