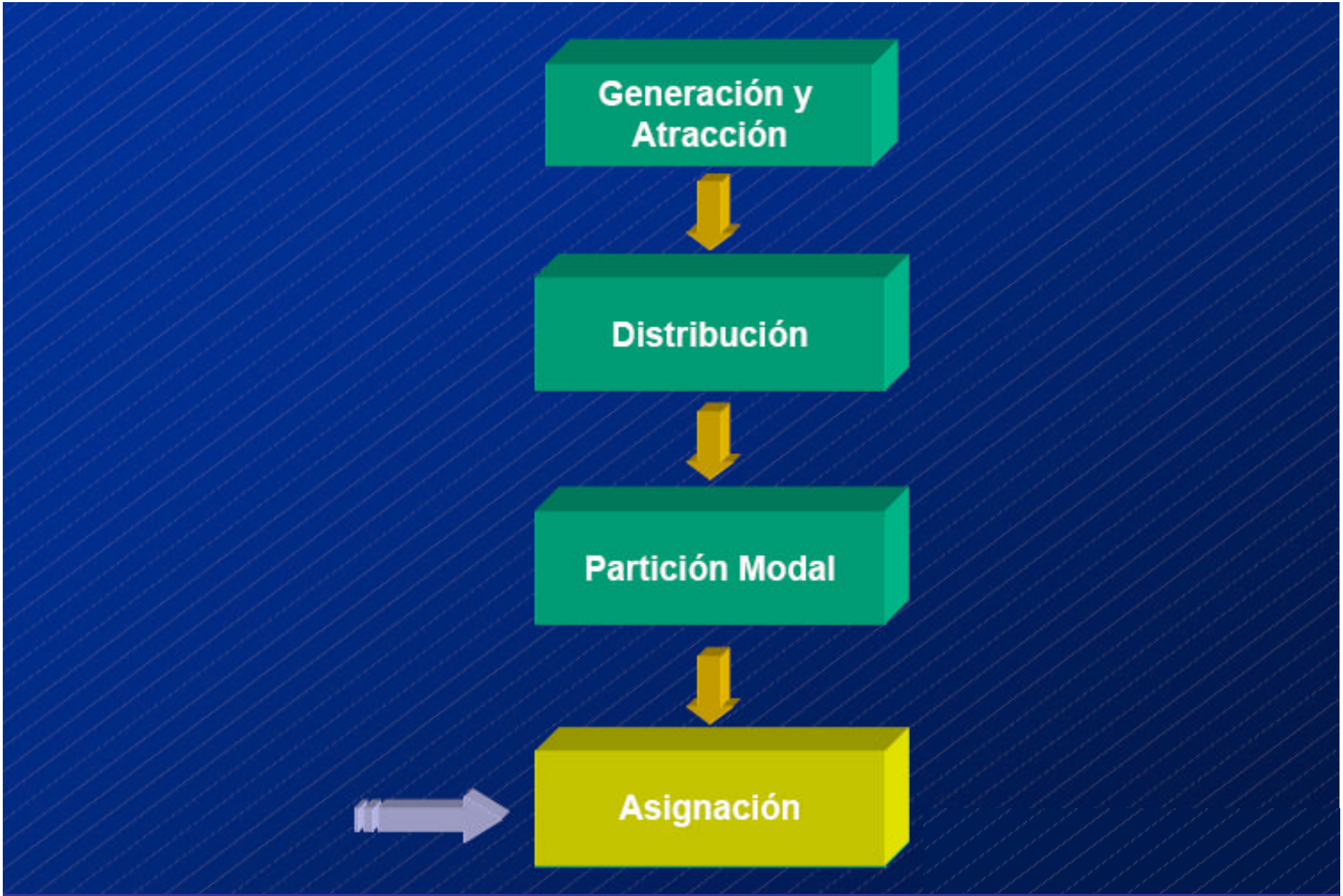
MODELOS DE ASIGNACIÓN A TRANSPORTE PRIVADO

CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO



CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO

ASIGNACIÓN

CONTENIDO PRESENTACÍÓN

- Concepto de Asignación.
- Equilibrio Óptimo de Usuarios.
- Equilibrio Óptimo del Sistema.
- Calibración Parámetros de Asignación.

ASIGNACIÓN

Una vez definidos los viajes O-D dentro del sistema analizado para un determinado período (**Distribución**) y los modos utilizados (**Partición Modal**), la etapa de **Asignación** determina las rutas empleadas en la realización de sus viajes.

Se consideran dos grupos de modelos de Asignación:

- Asignación Transporte Privado (vehículos sobre una red vial)
- Asignación Transporte Público (pasajeros sobre una red de servicios)

ASIGNACIÓN TRANSPORTE PRIVADO

Se consideran básicamente dos enfoques:

- **Sin Congestión**:
  - Asignación a Rutas Mínimas
  - Asignación Estocástica
- **Con Congestión**:
  - Asignación de Equilibrio Determinístico (Implementado en ESTRAUS)
  - Asignación de Equilibrio Estocástico

EQUILIBRIO DETERMINÍSTICO

Asignación de Equilibrio Determinístico:

i) **Supuestos:**

- Usuarios homogéneos y racionales
- Información perfecta
- El tiempo (costo) de viaje en un arco dependerá de su flujo:

$$c_a = c_a(f_a, F_a)$$ (Una Clase)

$$c_a^k = s_a(f_a, F_a) + \phi^k t_a$$ (Múltiples Clases)

f_a : flujo asignable F_a : flujo Fijo

EQUILIBRIO DETERMINÍSTICO (cont.)

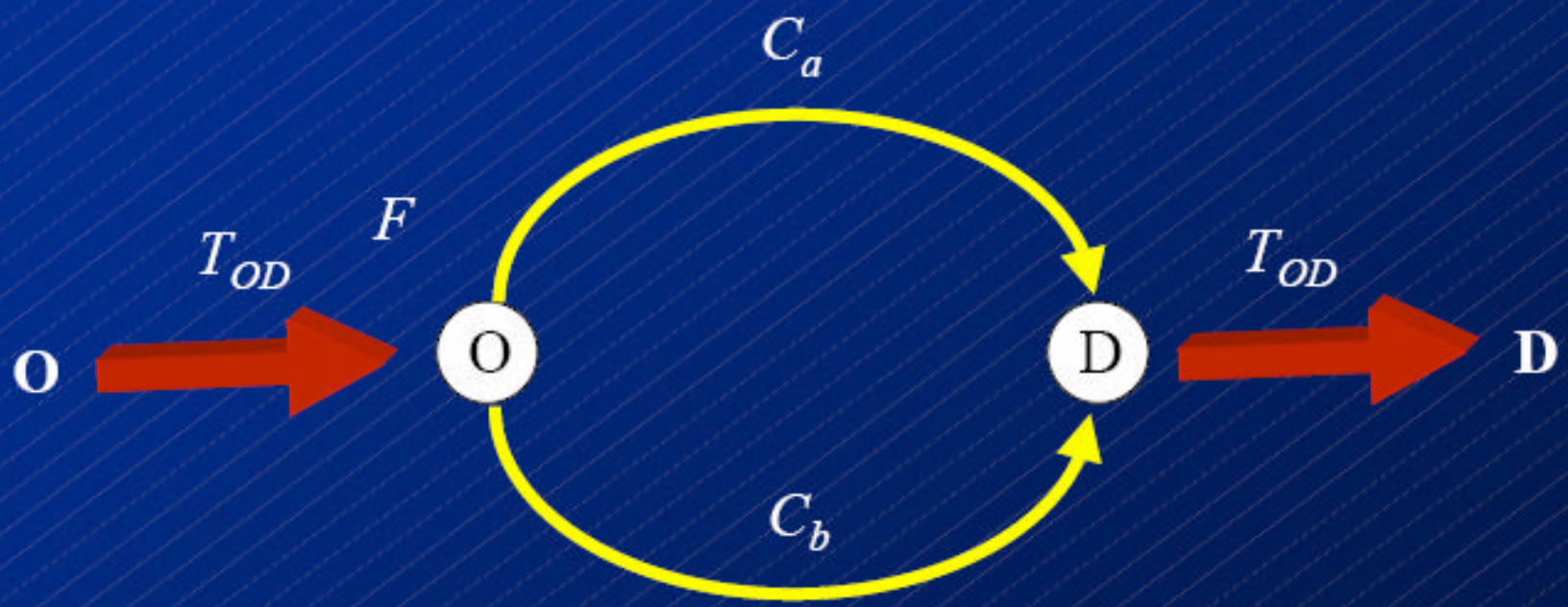
ii) **Equilibrio de Usuarios:**

a. **Principios de Equilibrio**

- **Wardrop**: ***en el equilibrio, ningún usuario puede reducir unilateralmente sus tiempos (costos) de viaje mediante un cambio de ruta.***
- **Smith**: *Los usuarios de la red sólo cambiarán de ruta si el costo total de operación sobre ella, calculado a base de los costos observados antes del cambio, disminuye.*

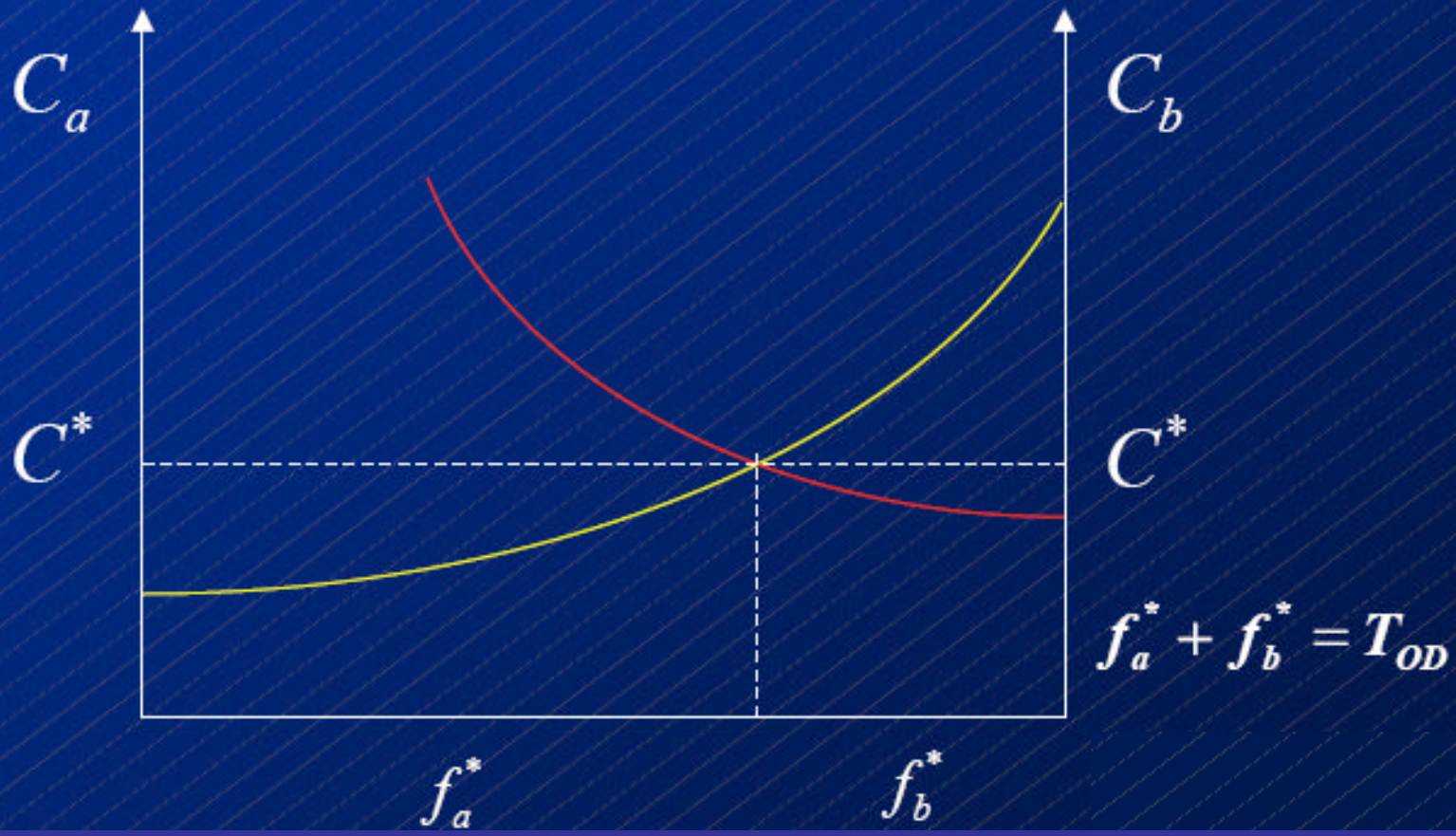
EQUILIBRIO DE USUARIOS

Ejemplo



EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Se cumple Wardrop y Smith.



EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Se cumple Wardrop y Smith

$$f_a^* = T_{OD}$$

EQUILIBRIO DETERMINÍSTICO (cont.)

Consideremos ahora el caso más general : **Muchas parejas origen – destino *(W)* en el sistema y muchas rutas posibles para viajar entre cada par específico *w***

W : *conjunto de pares O/D en el sistema*

P_w : *conjunto de rutas que unen un par específico w*

T_w : *Total de viajes en el par específico w*

h_p : *flujo en la ruta p*

C_p : *costo de viajar por la ruta p*

C_w : *costo de viajar entre el par w*

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

b. Condiciones de Equilibrio de Wardrop (una clase de usuarios):

$$\forall w \in W$$

$$C_p \begin{cases} = C_w^* & \forall \ p \in P_w / h_p > 0 \\ > C_w^* & \forall \ p \in P_w / h_p = 0 \end{cases}$$

Donde C_w^* es el costo observado en el equilibrio *sobre todas las rutas que unen el par w y que tienen flujo positivo.*

C_p es el costo de la ruta p del par w y h_p es el flujo de la ruta p.

EQUILIBRIO DETERMINÍSTICO (cont.)

Hasta ahora hemos caracterizado el estado de equilibrio de una red de transporte privado, pro aún no sabemos como encontrarlo.

- ***La Transformada de Beckmann***

$$Z\left(\{f_a\}\right) = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx$$

- ***Se puede expresar :***

$$Z = Z\left(\{f_a\}\right) \Rightarrow f_a = \sum \partial_{ap} \cdot h_p \;\forall a \in A \Rightarrow \quad Z = Z\left(\{h_p\}\right)$$

En la versión más simple de la Transformada de Beckmann

- El costo de un arco (c_a) depende sólo del flujo en él (f_a)
- El costo de un arco (c_a) es siempre positivo y creciente

$$\frac{\partial c_a}{\partial f_a} \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial c_a}{\partial f_b} = 0$$

Se puede demostrar que la *solución* del siguiente problema de optimización equivalente, cumple con las condiciones de equilibrio del primer principio de Wardrop:

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

c. **Formulación Matemática: (funciones de costo separables)**

$$\min_{\{f_a\}} \quad Z = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx$$

$$s.a.: \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall\ w \in W$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p = f_a \qquad \forall\ a \in A$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall\ p \in P$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

d. Unicidad de la Solución:

- Monótonas Crecientes Estrictas en el Flujo:

$$\frac{\partial c_a}{\partial f_a} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial c_a}{\partial f_b} = 0$$

$$\frac{\partial^2 c_a}{\partial f_a^{\,2}} > 0$$

Esto asegura la **unicidad de la solución** en términos de flujos en arcos del problema de Asignación

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

- Forma Funcional BPR: $$t_a(f_a) = t_a^0\left(1+\alpha_a\left(\frac{f_a+F_a}{k_a}\right)^{n_a}\right)$$

t_a : tiempo de viaje en el arco a

t_a^0 : tiempo de viaje a flujo libre en el arco a

f_a : flujo asignable en el arco a (veq)

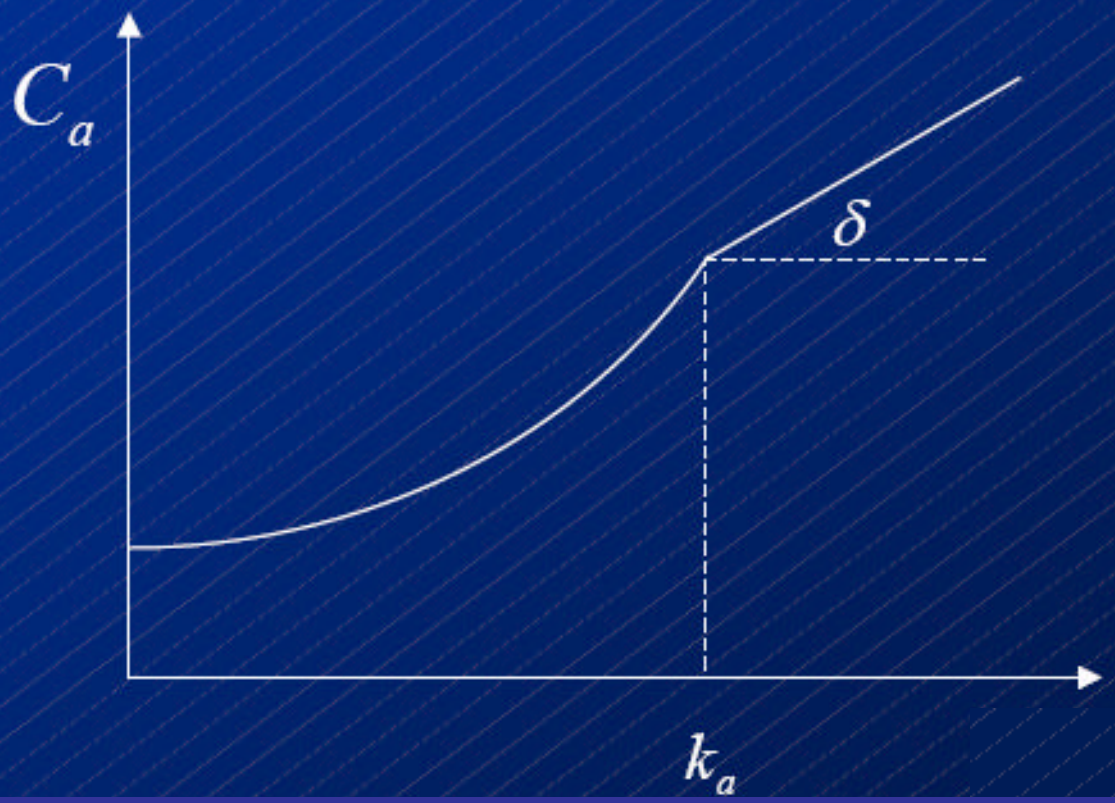
F_a : flujo fijo en el arco a (veq)

k_a : capacidad del arco a (veq)

α_a, n_a : parámetros de calibración del arco a

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

- Parámetro X_SLOPE (δ):



EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

$$t_a(f_a) = \begin{cases} t_a^0\left(1+\alpha_a\left(\dfrac{f_a+F_a}{k_a}\right)^{n_a}\right) & \forall \quad f_a+F_a \le k_a \\ t_a^0(1+\alpha_a)+\delta\left(\dfrac{f_a+F_a-k_a}{k_a}\right) & \forall \quad f_a+F_a > k_a \end{cases}$$

La forma lineal que se observa cuando el flujo supera la capacidad representa el comportamiento de los vehículos en las **colas** de los arcos sobrecargados, asumiendo que las colas aumentan linealmente durante el período de simulación (arcos saturados). Además, se mitigan problemas de **convergencia**.

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

e. **Asignación Multiclase**: asigna simultáneamente diferentes clases de usuarios (distintos niveles socioeconómicos).

$$C_p^k \begin{cases} = C_w^{k*} & \forall \quad p \in P_w \,/\, h_p^k > 0 \\ > C_w^{k*} & \forall \quad p \in P_w \,/\, h_p^k = 0 \end{cases}$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Existen tantas funciones de costo en cada arco como clases de usuario:

- Tarificación Vial.
- Peajes.
- Concesiones Viales.

$$c_a^k = s_a\left(f_a\right) + \phi^k t_a$$

EQUILIBRIO DE USUARIOS (cont.)

Formulación Matemática Asignación Multiclase:

$$\min_{\{f_a\}} \quad Z = \sum_a \int_0^{f_a} s_a(x)dx + \sum_a \sum_k \phi^k t_a f_a^k$$

$$s.a.: \quad \sum_{p \in P_w} h_p^k = T_w^k \qquad \forall\ w \in W$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p^k = f_a^k \qquad \forall\ a \in A$$

$$\sum_k T_w^k = T_w \qquad \forall\ w \in W$$

$$\sum_k f_a^k = f_a \qquad \forall\ a \in A$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall\ p \in P$$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA

***iii*) Comportamiento óptimo del sistema:**

Segundo Principio de Wardrop: ***Una estructura de flujos $\{f_a\}$ será óptima si el costo total de operación en la red, asociado a tal estructura de flujos es mínimo***

- Hemos supuesto que al utilizar un arco a el usuario experimenta un costo de operación (costo medio) que es función del total de flujo de usuarios utilizando el arco:

$$c_a = c_a(f_a)$$ (siempre positivo, siempre creciente)

- El costo total de operación en el arco es entonces:

$$CT_a = f_a \cdot c_a(f_a)$$

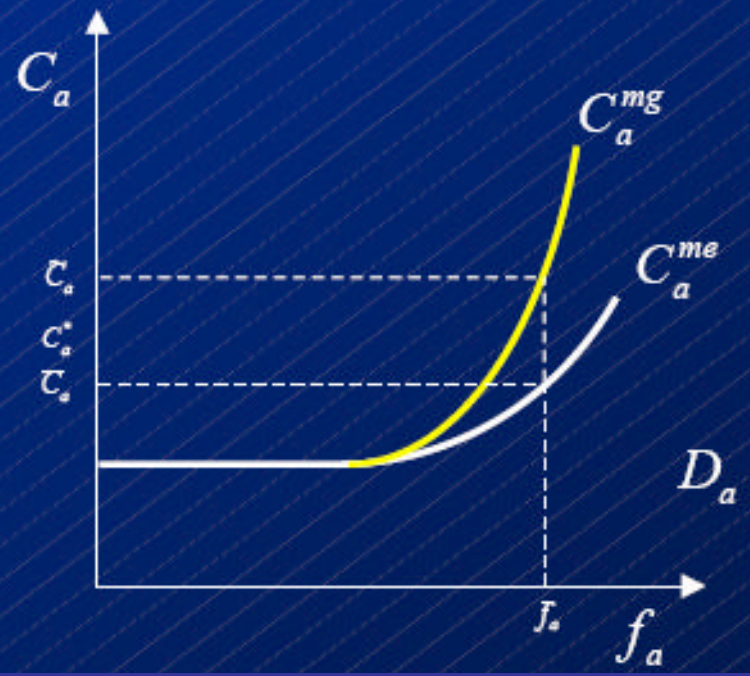
- Y el correspondiente costo marginal en el arco:

$$cmg_a = \frac{\partial CT_a}{\partial f_a} = c_a(f_a) + f_a \cdot \frac{\partial c_a(f_a)}{\partial f_a}$$

- El segundo término de la expresión del costo marginal corresponde a la externalidad de congestión producida por un usuario marginal que entra al arco.
- Es siempre positiva, puesto que el costo medio es creciente y su derivada es siempre positiva. .

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA

Asignación de Equilibrio Óptimo del Sistema: Minimiza los costos totales de operación sobre la red vial, captando las externalidades por congestión.



EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)

Formulación Matemática Asignación Óptimo Sistema:

$$\min_{\{f_a\}} \quad Z = \sum_a c_a(f_a) \cdot f_a$$

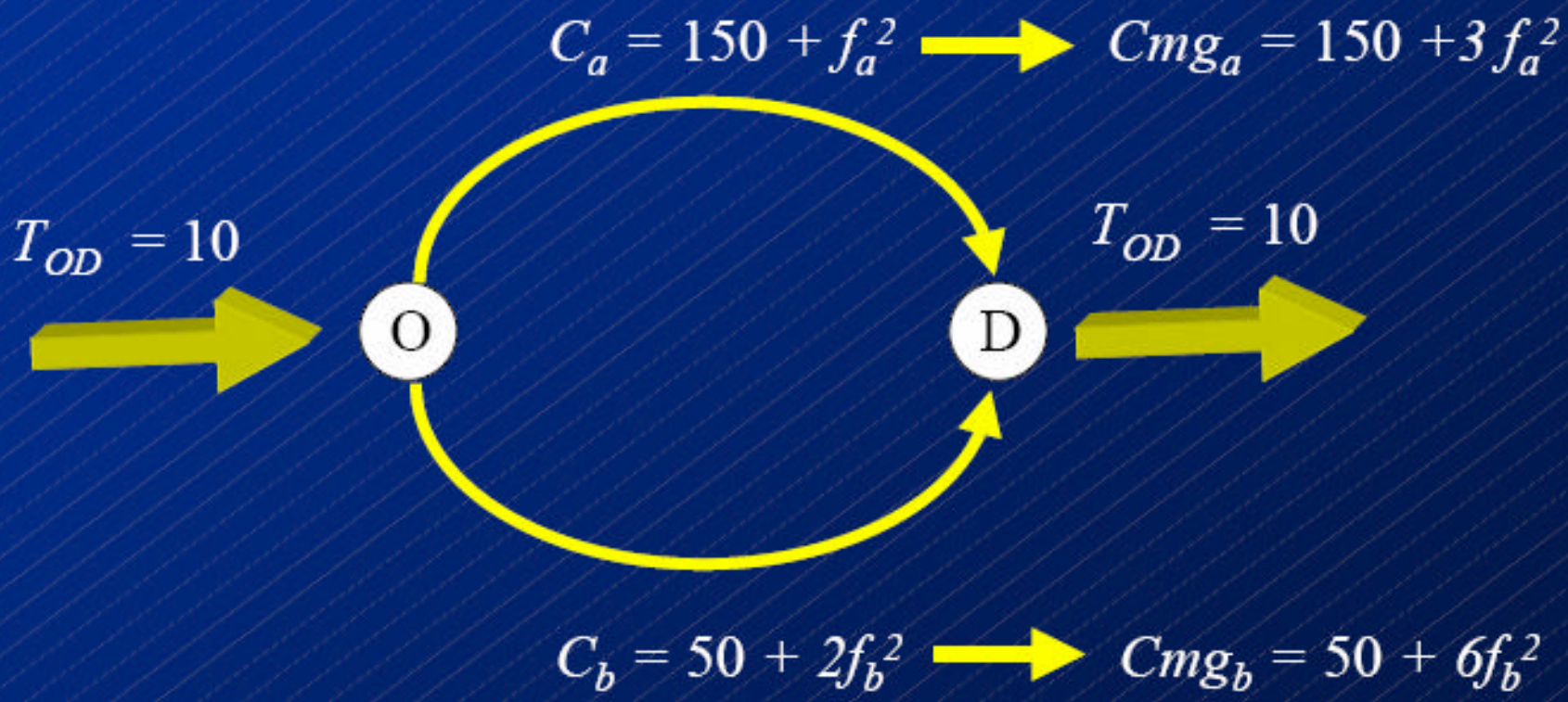
$$s.a.: \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall \ w \in W$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p = f_a \qquad \forall \ a \in A$$

$$h_p \geq 0 \qquad \forall \ p \in P$$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)

Ejemplo



EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)

Equilibrio Usuarios:

$f_a = 2{,}7$ $\quad f_b = 7{,}3$

$C_a = 157{,}2$ $\quad C_b = 157{,}2$

$$C_{TOTAL} = C_a \cdot f_a + C_b \cdot f_b = 1.572$$

Equilibrio Óptimo:

$f_a^* = 4{,}7$ $\quad f_b^* = 5{,}3$

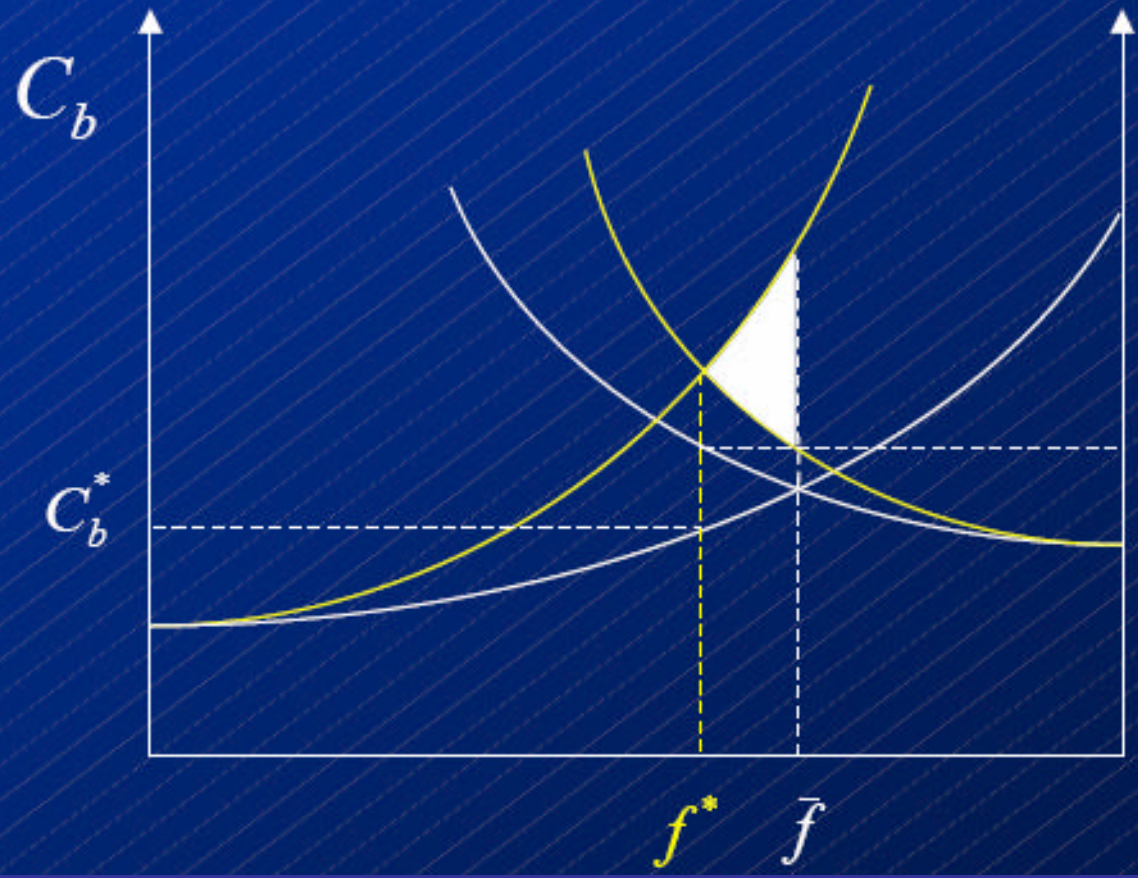
$C_a^* = 172{,}3$ $\quad C_b^* = 105{,}7$

$Cmg_a^* = 217$ $\quad Cmg_b^* = 217$

$$C_{TOTAL}^* = C_a^* \cdot f_a^* + C_b^* \cdot f_b^* = 1.372$$

$$\Delta \text{ SOCIAL} = 200$$

EQUILIBRIO ÓPTIMO SISTEMA (cont.)



CALIBRACIÓN DE REDES

vii) **Calibración Redes Transporte Privado:**

$$t_a(f_a) = t_a^0 \left(1 + \alpha_a \left(\frac{f_a}{k_a} \right)^{n_a} \right)$$

- Medición en terreno de variables t_a^0 y k_a.

CALIBRACIÓN DE REDES (cont.)

$$\min_{\{x_i\}} \quad \sum_a \left(f_a^0 - \tilde{f}_a(\vec{x})\right)^2$$

$$s.a.: \qquad x_i \geq 0 \qquad \forall\ i$$

f_a^0 : flujo observado en el arco a (veq)

$\tilde{f}_a$: flujo modelado en el arco a (veq)

x_i : parámetros de calibración

La solución de este problema de optimización se encuentra con el algoritmo de **Hooke y Jeeves**.

ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Método del Gradiente (Frank-Wolfe):

1) Partiendo de una solución inicial que cumpla las restricciones del problema, se determina la dirección factible en que la función objetivo disminuye su valor más rápidamente.

2) Una vez determinada la dirección de máximo descenso factible, se determina cuánto se debe descender en dicha dirección para finalmente encontrar una nueva solución.

Este proceso se repite hasta que dos soluciones sucesivas sean suficientemente similares de acuerdo a algún criterio de convergencia (proceso iterativo).

ALGORITMO DE SOLUCIÓN (cont.)

Método del Gradiente (Frank-Wolfe):

a) Encontrar solución inicial factible $\vec{f}_0$

b) Resolver aproximación lineal de función objetivo evaluada en solución inicial factible (obtener solución auxiliar).

$$\begin{aligned} min \quad & \nabla Z(\vec{f}_0) \cdot \vec{y} \\ s.a.: \quad & \Omega \end{aligned} \Rightarrow \vec{y}_0$$

c) Avance desde solución inicial en dirección de máximo descenso:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_0 + \lambda(\vec{y}_0 - \vec{f}_0)$$

ALGORITMO DE SOLUCIÓN (cont.)

d) Minimización unidimensional.

$$\min_{\{\lambda\}} \quad Z(\vec{f}_1) = Z(\lambda)$$

$$s.a.: \quad 0 \le \lambda \le 1$$

$$\lambda^*$$

e) Encontrar nueva solución y analizar convergencia.

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_0 + \lambda^* (\vec{y}_0 - \vec{f}_0) \qquad \left|\vec{f}_1 - \vec{f}_0\right| \le \left|\vec{\varepsilon}\right|$$

f) Si convergió, finalizar, sino, volver al paso (b).

MODELOS DE ASIGNACIÓN A TRANSPORTE PRIVADO

CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO