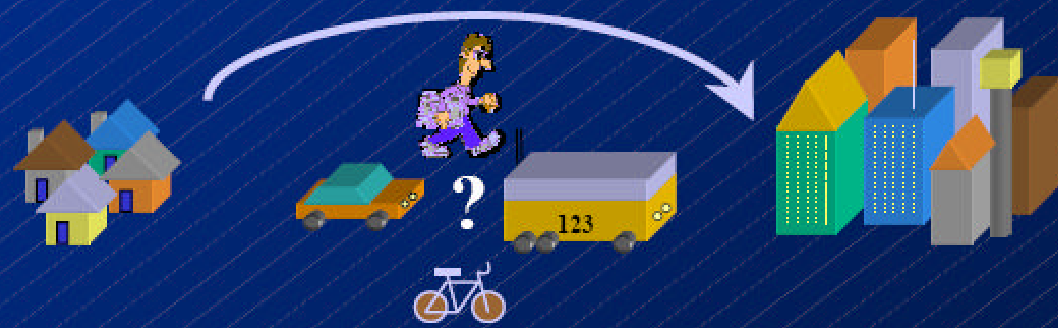
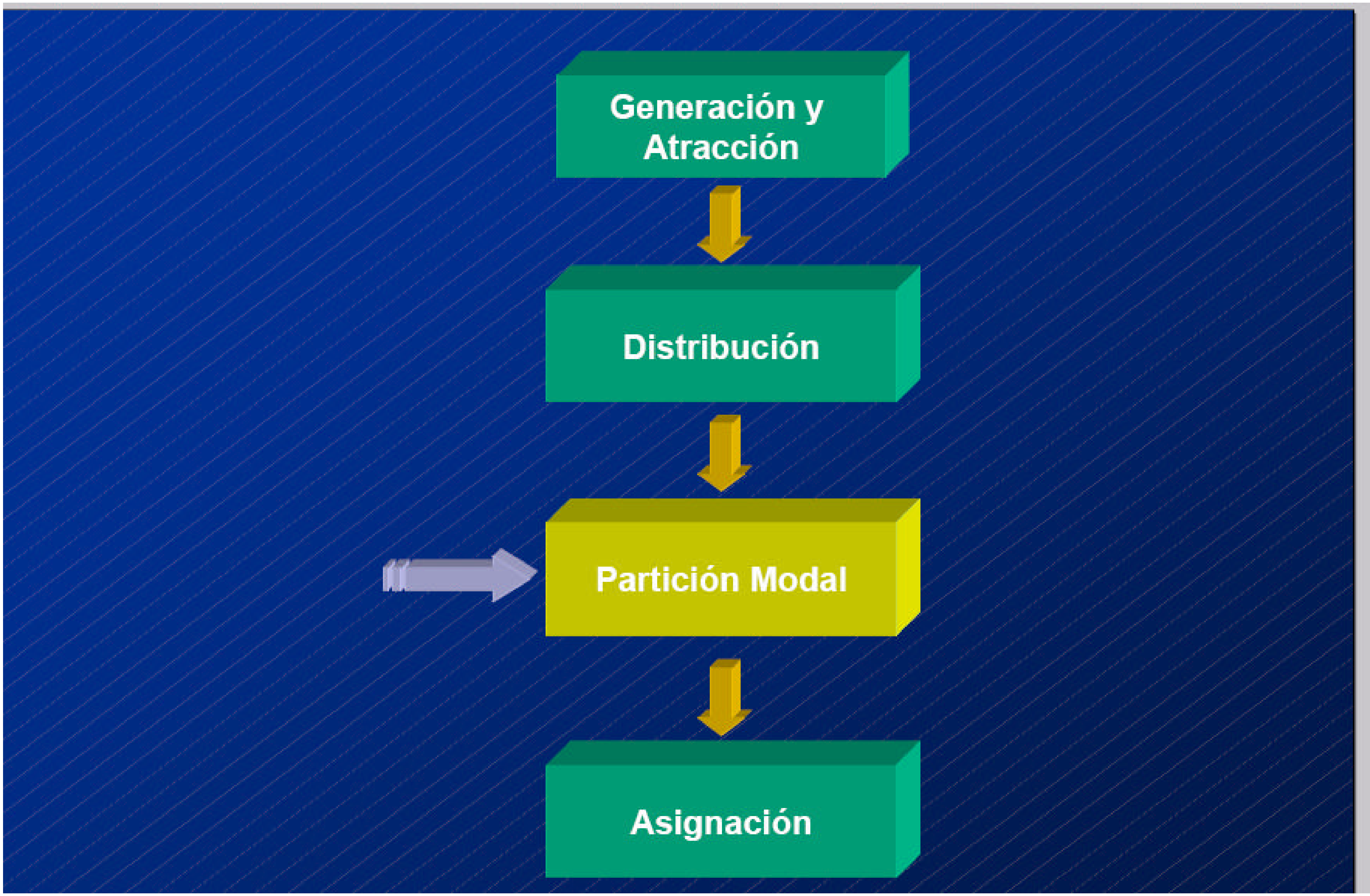
MODELO DE PARTICIÓN MODAL DE VIAJES



CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO


Generación y Atracción
Distribución
Partición Modal
Asignación

Contenido

- **Objetivos**
- **Modelos de Elección Discreta**
- **Características de los Modelos de Elección Discreta**
- **Formulación de Modelos de Elección Discreta**
    - Tipos de Modelos de Elección Discreta
        - » Modelo Logit Multinomial Simple
        - » Modelo Logit Multinomial Jerárquico
        - » Modelo Probit
- **Estimación de Modelos de Elección Discreta**
    - Especificación de Funciones de Utilidad
        - » Función de Utilidad Lineal
        - » Función de Utilidad Box-Cox

Objetivos

- Conocer la manera en que ESTRAUS determina la proporción de viajes que se realizan en los distintos modos para un determinado par O-D dentro del proceso de equilibrio simultáneo. De esta forma, se generan tantas matrices como modos de transporte existan disponibles para los usuarios de las distintas categorías consideradas.

- Por lo tanto, se requerirá un modelo de partición modal para cada categoría de demanda, propósito de viaje y período de análisis.

- Para el análisis se considerarán modelos de elección discreta

Modelos de Elección Discreta

- **Características Generales**
  - Simular el proceso de elección de un individuo enfrentado a un conjunto de alternativas discretas de elección
  - El análisis se realiza a nivel de individuos
  - Se busca responder **qué o cuál** bien consumir, a base de los atributos de dicho bien y las características del individuo

Ventajas de los Modelos de Elección Discreta

- Al calibrarse con datos individuales:
  - Son más eficientes en el uso de la información. En general, al ocupar a cada individuo como una observación se requieren menos datos
  - Al usar datos individuales se captura toda la variabilidad inherente a la información
  - Tienen menor probabilidad de sesgo debido a correlaciones entre unidades. (ejemplo: Falacia ecológica)
- Los modelos de elección discreta son probabilísticos
- Se calibran parámetros explícitos a las variables explicativas

Características de los Modelos de Elección Discreta

- Los Modelos de Elección Discreta, también llamados modelos de elección cualitativa, son útiles para modelar situaciones donde la elección de un individuo se puede caracterizar por:

  - El Conjunto de alternativas de elección es **finito**
  - Las alternativas son **mutuamente excluyentes**
  - Las alternativas son **exhaustivas** (todas las alternativas disponibles son incluidas)

- La hipótesis subyacente en este tipo de modelos es que *la probabilidad de que un individuo escoja una alternativa determinada es función de las características del individuo y de la atractividad relativa de cada opción*.

- En la formulación además se asume que los individuos máximizan su utilidad sujeto a las restricciones ambientales (sociales, físicas y presupuestarias). *homo economicus*

Modelos de Elección Discreta

- En el caso de transporte, un usuario de la categoría q, para viajar entre un par O-D determinado :
  - Dispone de un conjunto finito, discreto y conocido de modos de transporte alternativos.
    - » Auto
    - » Bus
    - » Metro
    - » Caminata
    - » etc.

  - La elección de un modo específico, dependerá de las características del usuario y de los atributos (costo, tiempo de viajes, comodidad, seguridad, etc.) de los modos disponibles.

Formulación de Modelos de Elección Discreta

Sea: U_{iq} : Utilidad asociada a la alternativa i por un individuo de categoría q.

x_{iq} : Vector de características observadas de la alternativa i por un individuo de categoría q.

Luego, cada individuo q escoge la alternativa que **maximiza su utilidad**, esto es, escoge la alternativa i si y sólo si:

$$U_{iq} > U_{jq}$$

Formulación de Modelos de Elección Discreta

Dado que el modelador no puede conocer todos los factores que afectan la decisión de un individuo, y por lo tanto, no conoce exactamente la función de utilidad. Se puede distinguir:

$$U_{iq} = V_{iq} + \varepsilon_{iq}$$

V_{iq} : Componente **observada** (determinística) de la utilidad, que es función de los atributos medidos (observados).

ε_{iq} : Componente **aleatoria** de la utilidad, que refleja la idiosincrasia y gustos particulares de cada individuo, además de errores de medición y observación por parte del modelador. Esta componente permite explicar:

- Individuos aparentemente idénticos escogen alternativas diferentes
- Individuo no escoge la alternativa aparentemente más conveniente

Ejemplo de Función de Utilidad

- Función de Utilidad Lineal en los parámetros (caso más sencillo y popular)

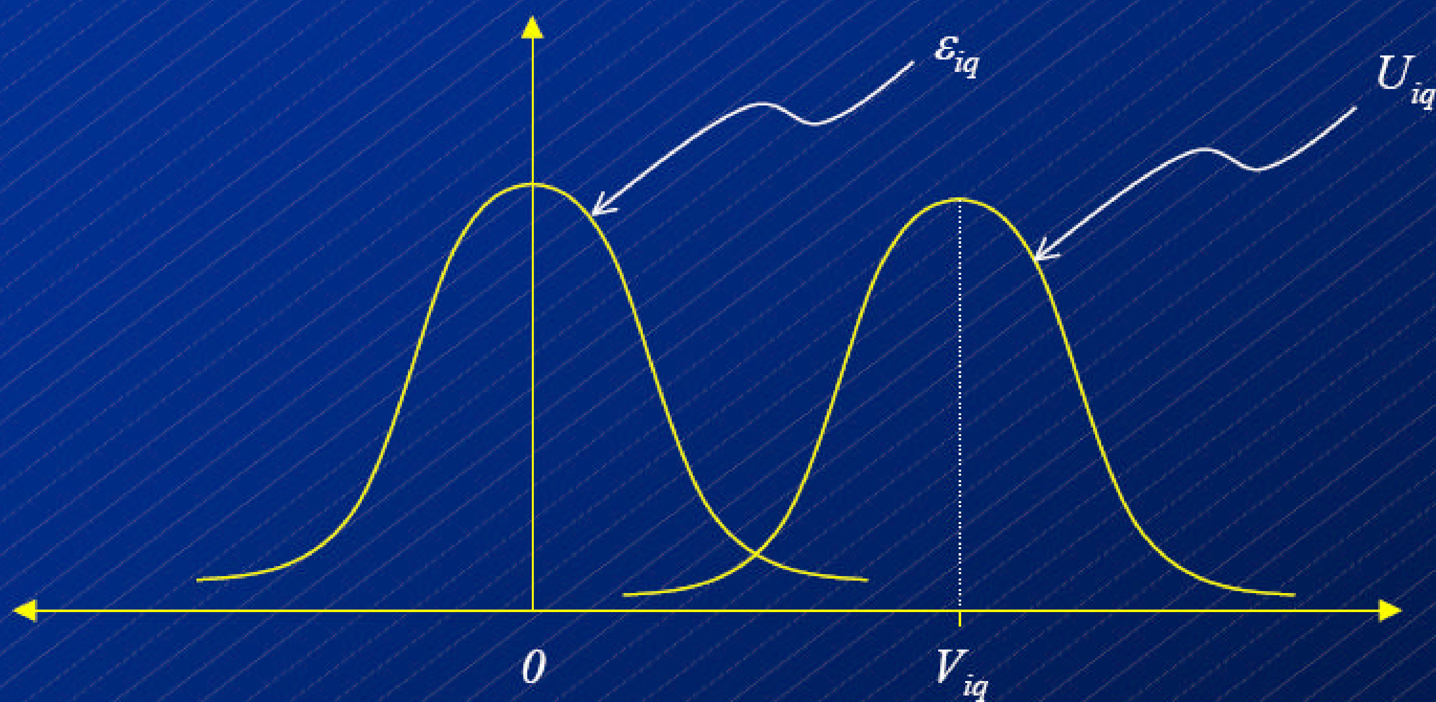
$$V_{iq} = \theta_{iq} + \sum_{k} \theta_{kiq} \cdot X_{kiq}$$

θ_{iq} : Constante modal del modo i para un usuario q. Esta representa ciertas características específicas del modo que no están representadas en el resto de la función de utilidad.

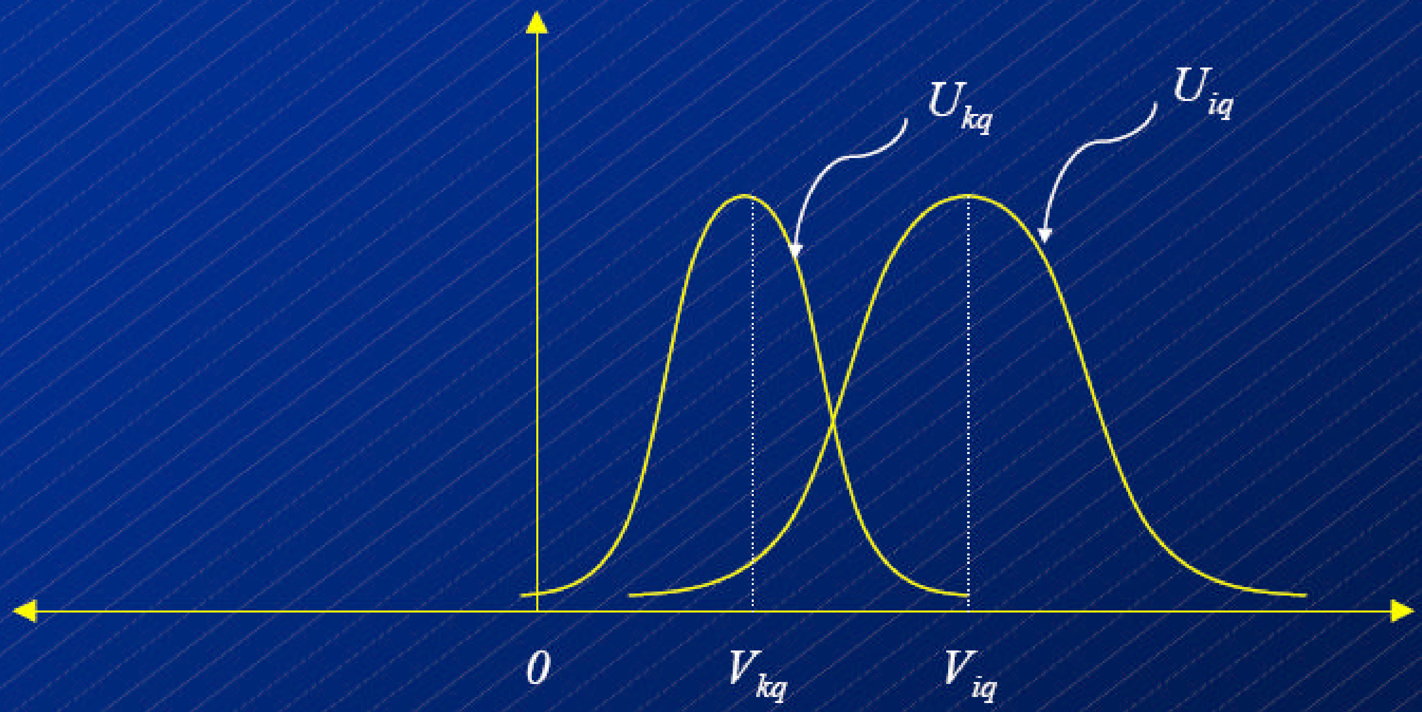
θ_{kiq} : Representa el "peso" que los usuarios de tipo q asignan a cada variable X_{kiq} incluida en la función de utilidad.

X_{kiq} : Representa indistintamente los atributos del modo i (tiempo de viaje, tiempo de espera, tarifa, etc.) y las caracteríticas de los usuarios de tipo q (ej.: ingreso, posesión de autimóvil, etc.).

Formulación de Modelos de Elección Discreta



Formulación de Modelos de Elección Discreta



Tipos de Modelos de Elección Discreta

- Dependiendo de los supuestos respecto a la función de distribución de los ε_{iq} , se puede obtener distintos modelos de elección discreta:
  - Logit Simple (MNL)
    - si ε_{iq} son i.i.d. Gumbell o valor extremo (Supone que no existe correlación entre alternativas)
  - Logit Jerárquico (HL)
    - Extensión del MNL para tratar alternativas correlacionadas (probabilidad condicionada)
  - Probit
    - si ε_{iq} tiene una distribución Normal
    - Permite tratar una matriz de correlaciones general
    - Difícil de resolver para más de 3 alternativas
      - » No será tratado en esta presentación

Modelo Logit Multinomial (MNL) de Elección Discreta

- En el modelo Logit Simple se supone que ε_{iq} i.i.d. Gumbell:

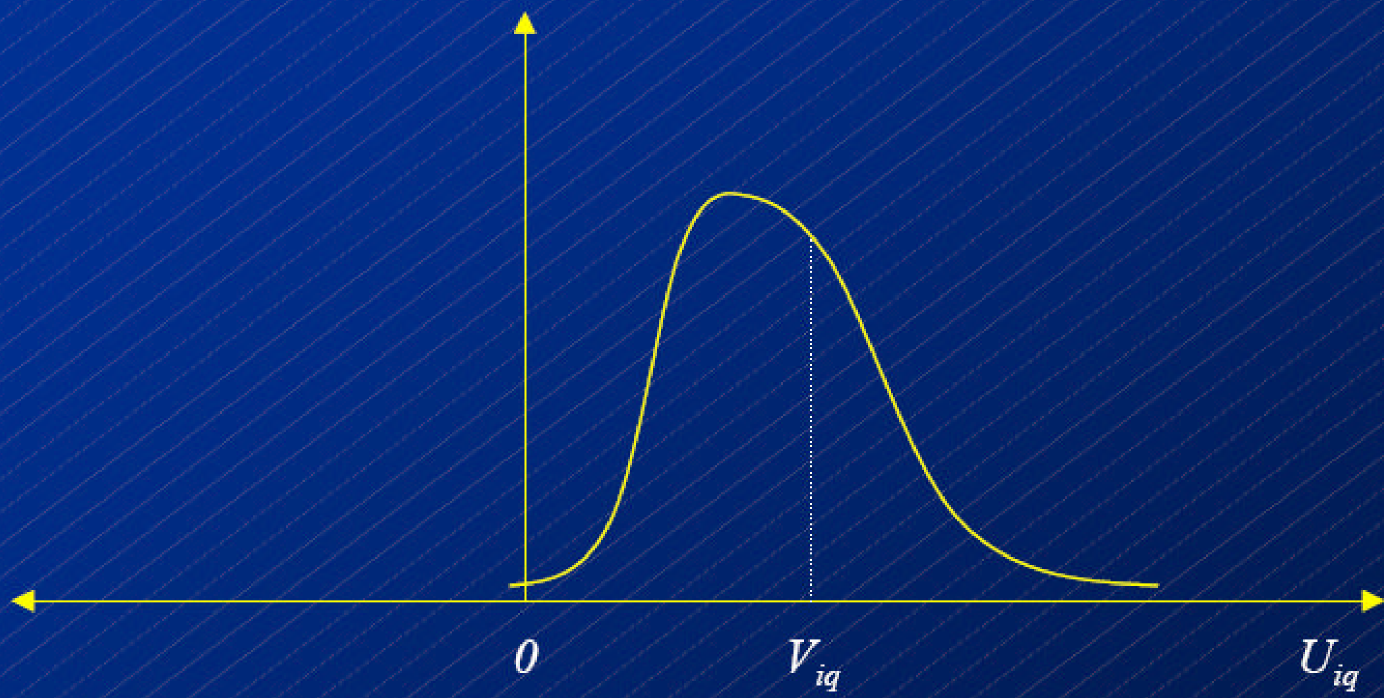
$$f\left(\varepsilon_{iq}\right)=\lambda_q e^{-\lambda_q\left(\varepsilon_{iq}-\alpha_q\right)} e^{-e^{-\lambda_q\left(\varepsilon_{iq}-\alpha_q\right)}} \qquad F\left(\varepsilon_{iq}\right)=e^{-e^{-\lambda_q\left(\varepsilon_{iq}-\alpha_q\right)}}$$

λ_q : Parámetro de escala asociado a la desviación estándar

α_q : Moda de la distribución

$$\mu_q=\alpha_q+\frac{0{,}5772}{\lambda_q}>\alpha_q \qquad \lambda_q=\frac{\pi}{\sigma_q\sqrt{6}}$$

Modelo Logit Multinomial (MNL) de Elección Discreta



Modelo Logit Multinomial (MNL) de Elección Discreta

- Luego, la probabilidad de que un usuario q elija el modo i es igual a:

$$P_{iq} = \frac{\exp(\lambda_q \cdot V_{iq})}{\sum_j \exp(\lambda_q \cdot V_{jq})}$$

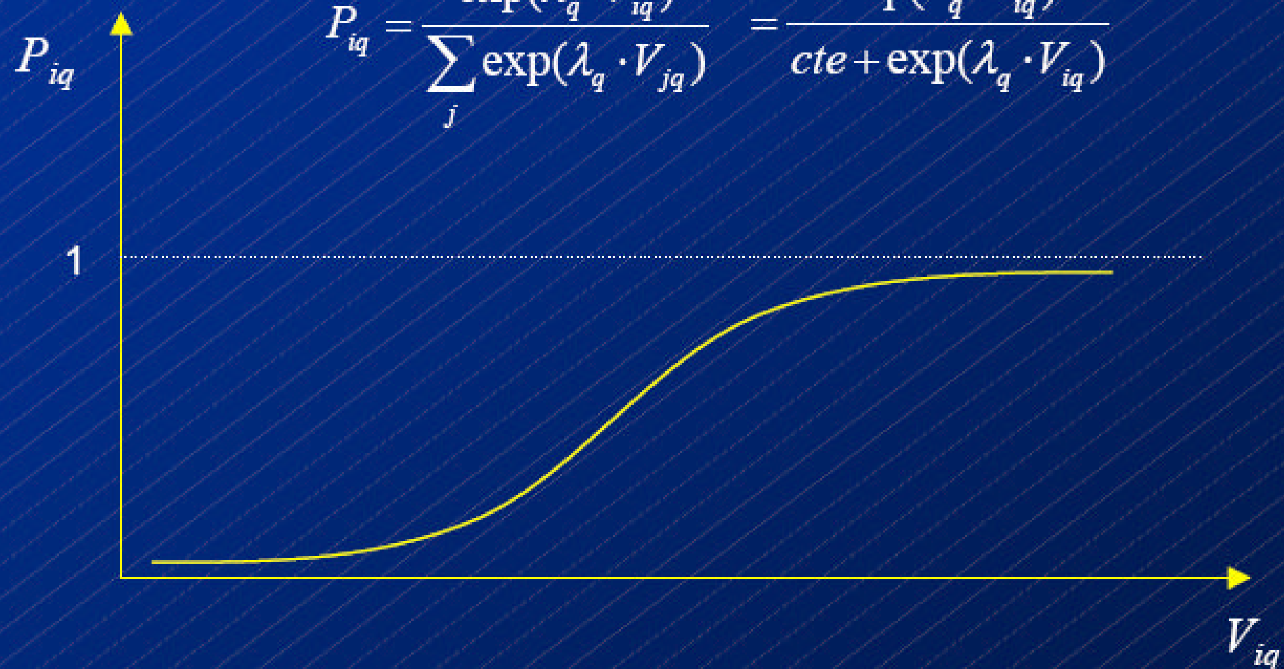
En la práctica este parámetro no puede estimarse aisladamente de los parámetros de V_{iq}

$$\widetilde{V}_{iq} = \lambda_q \cdot V_{iq}$$

Modelo Logit Multinomial (MNL) de Elección Discreta

Función Logit de Probabilidad de Escoger el Modo i

$$P_{iq} = \frac{\exp(\lambda_q \cdot V_{iq})}{\sum_j \exp(\lambda_q \cdot V_{jq})} = \frac{\exp(\lambda_q \cdot V_{iq})}{cte + \exp(\lambda_q \cdot V_{iq})}$$



Modelo Logit Multinomial (MNL) de Elección Discreta

- Propiedades del modelo Logit Simple
  - Si existen muchas alternativas, se puede demostrar que si el modelo se estima con una muestra aleatoria del conjunto de elecciones, se obtienen parámetros insesgados, eficientes e invariantes asintóticamente normales
  - Se puede estimar con datos sesgados, en términos del número de usuarios que elige cada modo (sólo si todos los usuarios tienen todas las alternativas disponibles) corrigiendo las constantes se puede obtener un modelo insesgado

Modelo Logit Multinomial (MNL) de Elección Discreta

– Independencia de la Alternativas Irrelevantes (IIA)

$$\frac{P_{iq}}{P_{jq}} = \exp\left\{\lambda_q \cdot \left(V_{iq} - V_{jq}\right)\right\}$$

- Permite tratar opciones nuevas sin recalibrar el modelo
- Conduce a predicciones sesgadas si existen alternativas correlacionadas
  – Ejemplo: bus azul y bus rojo (Mayberry, 1973)

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta

- Para resolver los problemas asociados a la IIA del MNL y poder tratar alternativas correlacionadas (caso común en aplicaciones de transporte) se puede utilizar el Modelo Logit Jerárquico (HL) (Sobel, 1980)
  - En este las alternativas correlacionadas se agrupan en nidos
  - La elección modal se resuelve como un proceso escalonado de decisiones Logit entre nidos

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta

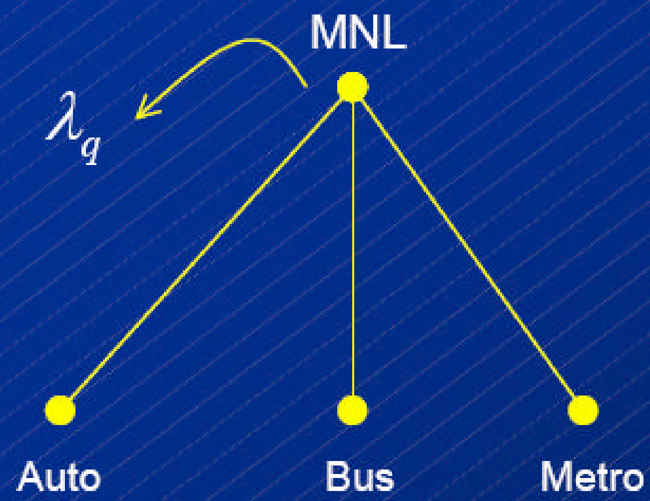
- La introducción del nido inferior en la jerarquía superior, se hace a través de la alternativa compuesta, a la cual se asocia una **utilidad representativa** de todo el nido, que considera el **valor esperado de la utilidad máxima** entre las alternativas del nido (EMU: Expected Maximum Utility)

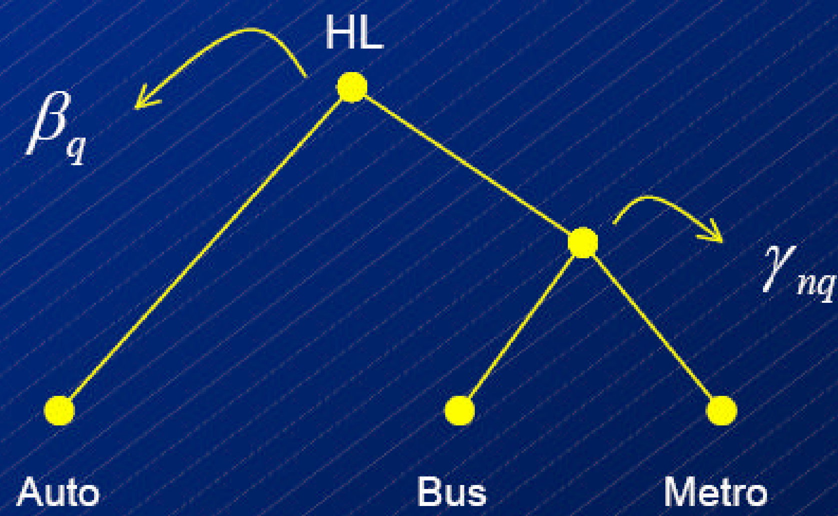
- De esta forma, la Utilidad L_{nq} compuesta del nido n para la categoría de usuario q es igual a:

$$L_{nq} = \frac{1}{\gamma_{nq}} \ln \sum_{k \in n} \gamma_{nq} V_{kq}$$

- Al interior de cada nido inferior se considera un MNL

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta





$$P_{iq} = \frac{\exp(\lambda_q \cdot V_{iq})}{\sum_j \exp(\lambda_q \cdot V_{jq})}$$

$$P_{iq} = \frac{\exp(\beta_q \cdot L_{nq})}{\sum_m \exp(\beta_q \cdot L_{mq})} \frac{\exp(\gamma_q \cdot V_{iq})}{\sum_j \exp(\gamma_q \cdot V_{jq})}$$

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta

– La probabilidad de elegir el modo ***i*** dentro del nido ***n*** de un conjunto total de nidos ***m*** se puede escribir como:

$$P_{iq} = \frac{\exp(\beta_q \cdot L_{nq})}{\sum_m \exp(\beta_q \cdot L_{mq})} \frac{\exp(\gamma_q \cdot V_{iq})}{\sum_j \exp(\gamma_q \cdot V_{jq})}$$

$$P_{iq} = \frac{\exp\left(\dfrac{\beta_q}{\gamma_{nq}} \ln \sum_{k \in n} \gamma_{nq} V_{kq}\right)}{\sum_m \exp\left(\dfrac{\beta_q}{\gamma_{mq}} \ln \sum_{k \in m} \gamma_{mq} V_{kq}\right)} \frac{\exp(\gamma_q \cdot V_{iq})}{\sum_{j \in n} \exp(\gamma_q \cdot V_{jq})}$$

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta

$$P_{iq} = \frac{\exp\left(\phi_{nq} \ln \sum_{k \in n} \gamma_{nq} V_{kq}\right)}{\sum_m \exp\left(\phi_{mq} \ln \sum_{k \in m} \gamma_{mq} V_{kq}\right)} \frac{\exp(\gamma_q \cdot V_{iq})}{\sum_{j \in n} \exp(\gamma_q \cdot V_{jq})}$$

$$P_{iq} = \frac{\exp\left(\phi_{nq} \ln \sum_{k \in n} \widetilde{V}_{kq}\right)}{\sum_m \exp\left(\phi_{mq} \ln \sum_{k \in m} \widetilde{V}_{kq}\right)} \frac{\exp(\widetilde{V}_{iq})}{\sum_{j \in n} \exp(\widetilde{V}_{jq})}$$

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta

i) Si $\phi < 0 \Rightarrow$ aumentos en la utilidad del nido disminuye su probabilidad de elección

ii) Si $\phi = 0 \Rightarrow$ aumentos en la utilidad del nido no altera su probabilidad de elección

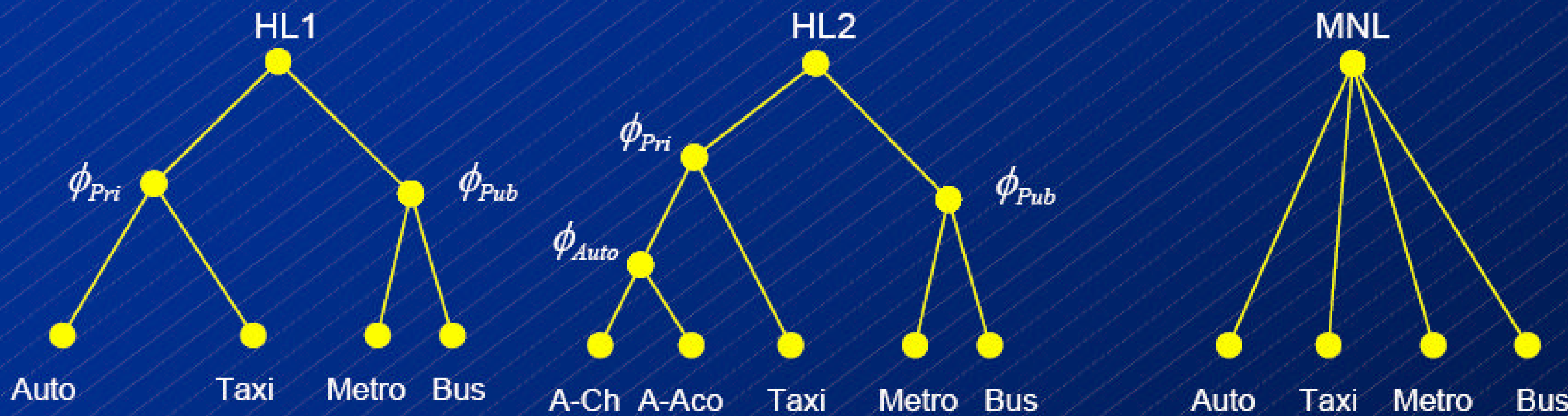
ii) Si $\phi = 1 \Rightarrow$ el modelo colapsa a un MNL (varianzas iguales en alternativas)

iii) Si $\phi > 1 \Rightarrow$ aumentos en la utilidad de una opción del nido aumentaría la probabilidad de elección de todas las alternativas del nido

Por lo tanto, se debe exigir:

$$0 < \phi \leq 1$$

Modelo Logit Jerárquico (HL) de Elección Discreta



$$0 < \phi_{Pri} \le 1$$

$$0 < \phi_{Pub} \le 1$$

$$0 < \phi_{Auto} \le \phi_{Pri} \le 1$$

$$0 < \phi_{Pub} \le 1$$

Caso $\phi_i = 1 \quad \forall i$

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

- Se busca estimar los estimadores de los parámetros θ de V
- Para ello, se usa el método de **máxima versosimilitud**
  - A partir de datos observados se buscan los parámetros del modelo que maximizan la probabilidad de reproducir las elecciones observadas
    - Ejemplo: Individuo 1 escoge m_1
      Individuo 2 escoge m_3
      Individuo 3 escoge m_1
      Individuo 4 escoge m_2

      …

Función de Verosimilitud: $L(\theta)=P_{11}*P_{23}*P_{31}*P_{42}$

- Por comodidad se maximiza $l(\theta)=\ln(L(\theta))$ para encontrar $\hat{\theta}$

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

- Propiedades:
  - Consistencia (asintóticamente insesgados)
  - Eficientes (mínima varianza)
  - Distribuyen asintóticamente normal
  - Invariantes
  - La función $-2l(\theta)$ distribuye asintóticamente χ^2 con N grados de libertad, donde N es el tamaño muestral

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

Test Estadíticos Asociados

– Definiciones Preliminares

$l(0)$: Valor de la función log-verosimilitud para el **modelo equiprobable**, aquel que tiene todos los parámetros nulos: P_i = *1/(número de alternativas)*

$l^*(C)$: Valor de la función log-verosimilitud para el **modelo sólo constantes**, en este por construcción se replica las proporciones de mercado observadas.

P_i = *Proporción observada en la muestra que usa* A_i

$l^*(\hat{\theta})$: Valor de la función log-verosimilitud para el modelo estimado

$l^* = \ln(1) = 0$: Máximo valor de la función log-verosimilitud, conocida como modelo completamente saturado.

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

- Test Estadísticos Asociados
  - Test t para un parámetro θ_k
    - Se testea que el parámetro sea significativamente distinto de cero
    - Y de signo correcto (por ejemplo: parámetro asociado al costo negativo)
  - Indice ρ Cuadrado Corregido (Tardiff,1976)

$$\overline{\rho}^2 = 1 - \frac{l(\hat{\theta})}{l(C)}$$

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

- Test Estadísticos Asociados
  - En general, se usan para comparar modelos respecto a un modelo restringido.
  - Un caso particular de estas comparaciones, es la de **un modelo con atributos específicos respecto al mismo pero con atributos genéricos**.

– Test de Razón de Verosimilitud

$$-2\left\{l(\hat{\theta}_r)-l(\hat{\theta})\right\} \quad \text{distribuye asintóticamente } \chi^2_{(k)}$$

donde k es el número de restricciones impuestas.

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

– Test de Wald

$$\left[\mathrm{c}(\hat{\theta})-r\right]^T\left[\nabla\mathrm{c}(\hat{\theta})^T V(\hat{\theta})\nabla\mathrm{c}(\hat{\theta})\right]^{-1}\left[\mathrm{c}(\hat{\theta})-r\right] \text{ distribuye asintóticamente } \chi^2_{(k)}$$

– Test de Multiplicadores de Lagrange

$$\left[\nabla l(\hat{\theta}_r)\right]^T\left(-\mathrm{E}\left[\nabla l(\hat{\theta}_r)^T \nabla l(\hat{\theta}_r)\right]\right)^{-1}\left[\nabla l(\hat{\theta}_r)\right] \text{ distribuye asintóticamente } \chi^2_{(k)}$$

Especificación de Funciones de Utilidad

- En las funciones de utilidad lineales la utilidad marginal es constante e independiente de la magnitud de la variable explicativa (tiempo de viaje, costo, etc.)

  Por ejemplo, para los siguientes casos el cambio de utilidad es el mismo

  - disminuir el tiempo viaje de 10 min. a 5 min.
  - disminuir el tiempo viaje de 60 min. a 55 min.

  ¿ La desutilidad de un minuto adicional de viaje depende del tiempo de viaje?

- Dado que el MNL y HL requiere funciones lineales en los parámetros, para resolver este problema se puede considerar funciones del tipo:

$$V_i = \theta_i + \sum_k \theta_{ki} \cdot f(X_{ki}^n)$$

Especificación de Funciones de Utilidad

- Transformación Box-Cox
  - La transformada Box-Cox de una **variable positiva** $X^{(\lambda)}$ es igual a:

$$X^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{X^{\lambda} - 1}{\lambda} & , \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \ln X & , \text{ si } \lambda = 0 \end{cases}$$

i) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 1$ $\Rightarrow$ Se reduce a la forma lineal tradicional

ii) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ $\Rightarrow$ Se reduce a la forma log-lineal (Cobb-Douglas)

La evidencia empírica sugiere que $0 < \bullet < 1$

– Cuando la variable X toma valores negativos se puede sumar una constante a todos los valores y usar la misma transformación. A esta se llama transformación de **Box-Tukey**.

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

- Selección de Modelos
  - En general para calibrar modelos se comienza probando las especificaciones más complejas con estructuras funcionales lineales
  - Si los resultados son aceptables, es decir:
    - » signos de los parámetros correctos
    - » relación de orden de dummies de ingreso correcta
    - » significancia de los parámetros (*t* student)
    - » ajuste global satisfactorio (ρ^2 *corregido*)
    - Se prueban especificaciones con transformadas Box-Cox para algunas variables
      - » se chequea significancia y valor de parámetros λ

Especificación y Estimación de Modelos MNL y HL

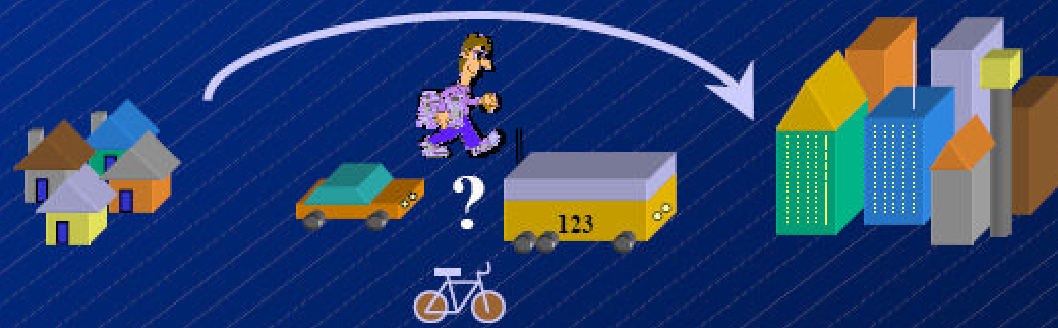
- Selección de Modelos
  - Adicionalmente, se intenta usar variables específicas y no genéricas, en la medida que el número de observaciones lo permita, por ejemplo:
    - » Distintos parámetros para tiempo de caminata, tiempo de espera y tiempo de viaje en vehículo, en vez de tiempo generalizado de viaje
    - » Distintos parámetros para tiempo de viaje en auto y tiempo de viaje en bus, en vez de un solo parámetro para tiempo de viaje

  – En general, con datos buenos, mientras más compleja sea la especificación y forma funcional adoptada, mejor será el ajuste global del modelo

Consideraciones Generales Para ESTRAUS

- Se consideran modelos agregados de partición modal (calibración a prtir de niveles de servicio promedio)
- Distintos pares O-D pueden tener disponibles alternativas distintas de modos de transporte
- Distintos tipos de usuarios pueden tener también disponibles alternativas distintas de modos de transporte, además de diferentes estimadores □ en las alternativas comunes
- Se pueden considerar variables especiales (dummy) para orígenes y destinos especiales
- El equilibrio simultáneo es consistente con funciones de utilidad lineales, aunque es posible implementar funciones no lineales (Box-Cox).

MODELO DE PARTICIÓN MODAL DE VIAJES



CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO