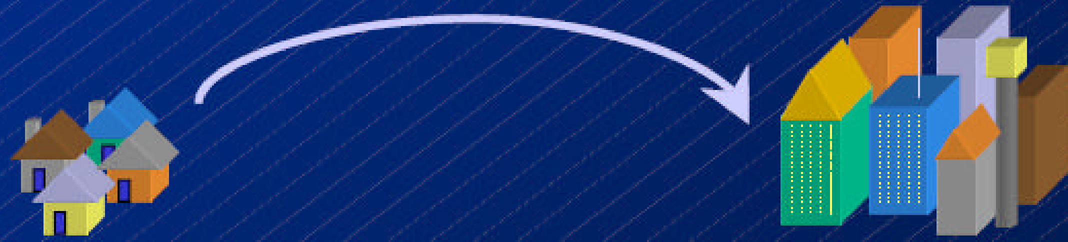
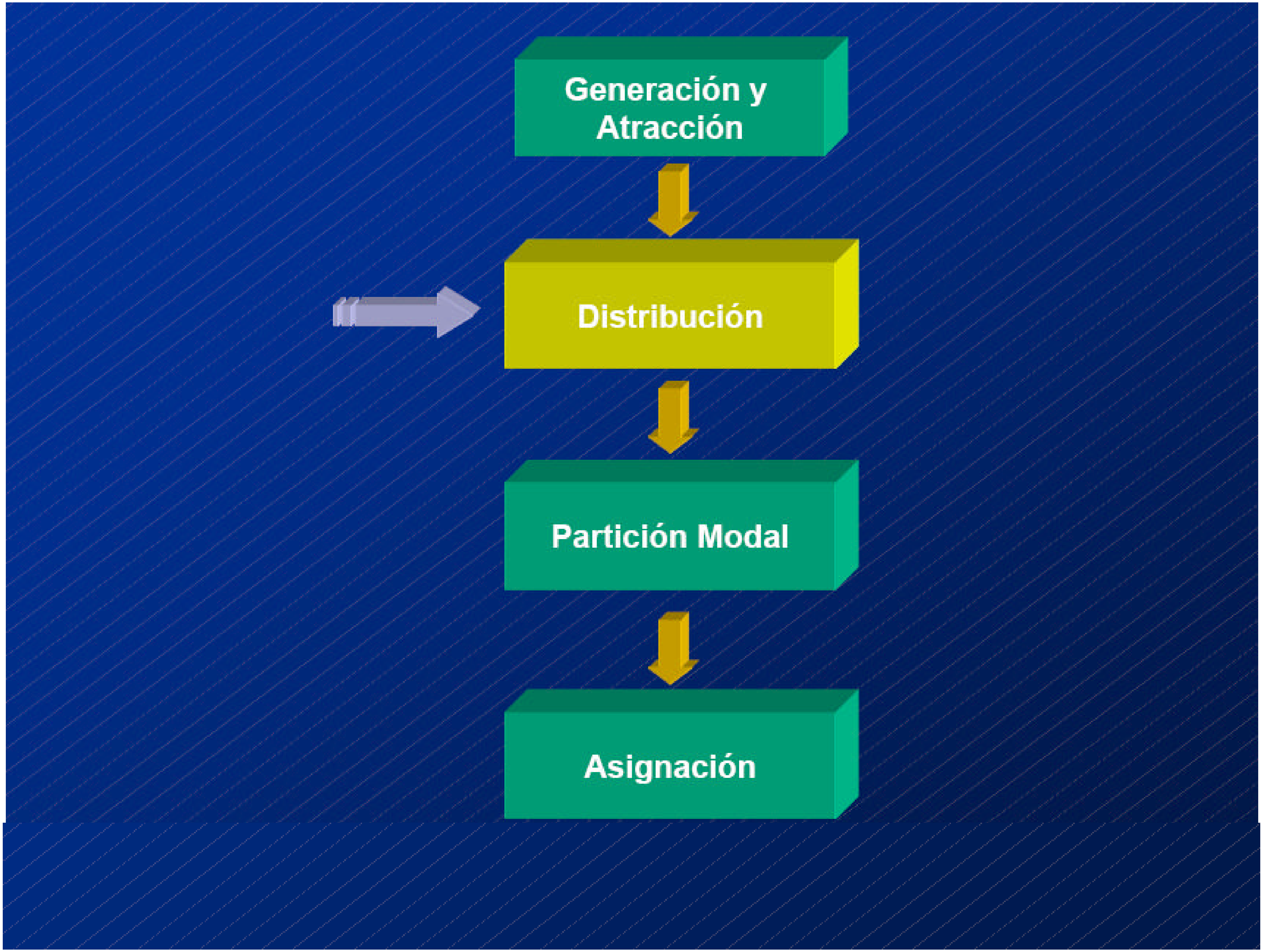
MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE VIAJES



CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO

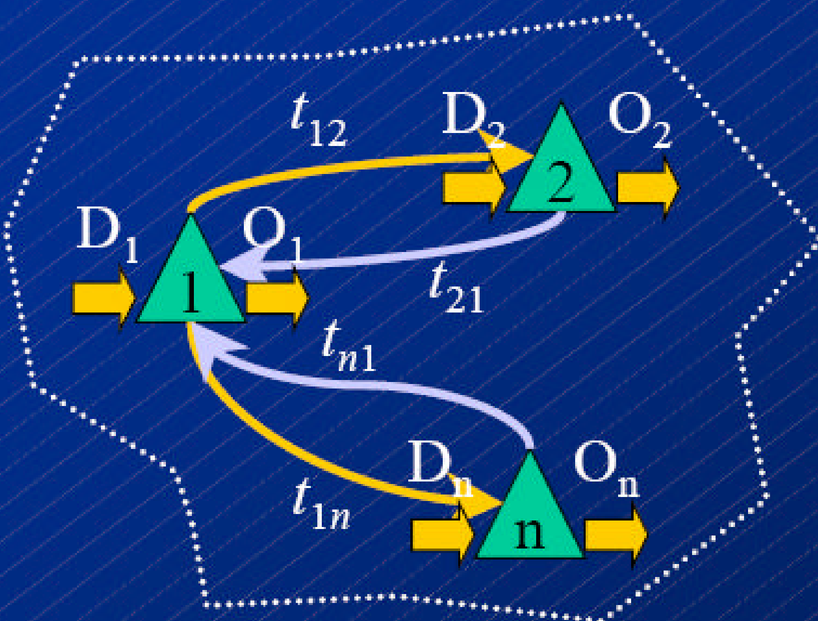

Generación y
Atracción
Distribución
Partición Modal
Asignación

CONTENIDO PRESENTACION

- Concepto de Distribución
- Modelos de Distribución
  - Maximización de Entropía
- Distribución en ESTRAUS
  - Uso de estructuras

CONCEPTO DISTRIBUCIÓN

El modelo de **Distribución** permite estimar el número de viajes realizados durante un determinado período entre las distintas zonas del sistema analizado.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & .... & n \end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\\cdots\\n\end{array} & \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22} & & t_{2n}\\ \cdots & & & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O_1\\O_2\\\cdots\\O_n\end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix}D_1 & D_2 & \cdots & D_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\end{bmatrix}\end{array}$$

ENFOQUES DE DISTRIBUCIÓN

Existen varios enfoques de modelación, la mayoría modelos matemáticos, para estimar la matriz de distribución de viajes dentro de una determinada área de estudio:

i) **Encuestas de Viajes**: muchas celdas vacías y muy costosas.

ii) **Métodos de Factor de Crecimiento**: consideran que se dispone de una matriz de viajes obtenida de un estudio previo.

- Factor Uniforme: todos los elementos de la matriz crecen a la misma tasa
- Factores de Crecimiento Acotados: cada celda de la matriz crece de acuerdo a información sobre la generación y atracción de viajes de la zona

ENFOQUES DE DISTRIBUCIÓN (cont.)

ii) **Métodos de Factor de Crecimiento (cont.)**

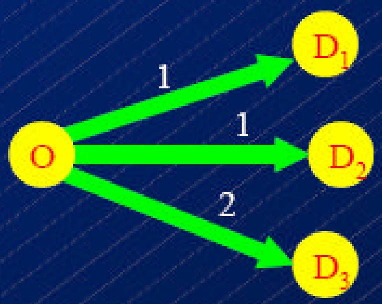
- Ventajas:
  - Fáciles de entender e implementar
  - Rápida convergencia de los resultados
  - Razonables en áreas estables y en análisis de corto plazo
  - Análisis de Sensibilidad
- Desventajas:
  - Resultados menos exactos
  - Inelásticos ante cambios en la red de transporte (proyectos viales y/o nuevos modos de transporte)

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA

iii) **Modelo de Maximización de Entropía**: analicemos el siguiente ejemplo.

Consideremos que el número total de viajes en el sistema (con un solo origen) es $T = 4$ y que T_j representa el número de viajes cuyo destino es la zona *j*.

Supongamos que $T_1 = 1$, $T_2 = 1$ y $T_3 = 2$.



Dado que el total de viajes es 4, existen cuatro individuos (A, B, C y D) en el sistema que pueden repartirse de las siguientes formas:

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Repartición (N)	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	A	B	C-D
2	A	C	B-D
3	A	D	B-C
4	B	A	C-D
5	B	C	A-D
6	B	D	A-C
7	C	A	B-D
8	C	B	A-D
9	C	D	A-B
10	D	A	B-C
11	D	B	A-C
12	D	C	A-B

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

El número de reparticiones N se puede obtener también como un problema **combinatorial**:

$$N = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 12$$

¿qué pasaría si $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ y $T_3 = 4$?

Repartición (N)	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	-	-	A-B-C-D

$$N = \binom{4}{0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Para este caso, en general, el número total de reparticiones N se puede escribir como:

$$N = \binom{T}{t_1} \cdot \binom{T - t_1}{t_2} \cdot \binom{T - t_1 - t_2}{t_3} \cdot \ldots\ldots$$

$$N = \frac{T!}{t_1!\cancel{(T - t_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(T - t_1)!}}{t_2!\cancel{(T - t_1 - t_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(T - t_1 - t_2)!}}{t_3!(T - t_1 - t_2 - t_3)!} \cdot \ldots\ldots$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Finalmente se obtiene la expresión de **Entropía**:

$$N = \frac{T!}{t_1!t_2!t_3!\ldots} = \frac{T!}{\prod_j t_j!}$$

Considerando el caso general, en el que hay tantos orígenes como destinos, resulta:

$$N = \frac{T!}{\prod_i \prod_j t_{ij}!}$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Considerando viajeros homogéneos, la más probable distribución de viajes es la que presenta un mayor número de reparticiones N.

Notar que N es máximo cuando la distribución es uniforme, por lo que todas las celdas tienen el mismo valor (en ausencia de restricciones de generación y atracción). Del mismo modo, el valor de N es mínimo cuando todas las celdas valen cero excepto una que vale T.

Por lo tanto, a menor información, mayor dispersión.

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

En el ejemplo, cada repartición de viajes específica de los individuos A, B, C y D corresponde a lo que se denomina **estado micro**. Por otra parte, la distribución propuesta corresponde a un **estado macro** (conjunto de estados micro).

En consecuencia, suponiendo que todos **los estados micro son igualmente probables**, la matriz de distribución estará dada por aquel estado macro que contenga un mayor número de estados micro asociados.

Por lo tanto, la distribución estimada (más probable) será aquella que **maximice el valor de N** (número de estados micro).

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Para determinar la matriz de distribución más probable, se debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{\{t_{ij}\}} \quad N = \frac{T!}{\prod_i \prod_j T_{ij}!}$$

$$s.a.: \quad \sum_j T_{ij} = O_i$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Aplicando una transformación monótona creciente a la expresión *N,* en este caso logaritmo natural, se obtiene:

$$\ln N = \ln\left(\frac{T!}{\prod_i \prod_i T_{ij}!}\right) = \ln T! - \sum_i \sum_j \ln T_{ij}!$$

A partir del criterio de límite Stirling se tiene que:

$$n^n \approx e^n n! \quad \rightarrow \quad \ln n! \approx n(\ln n - 1)$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

Finalmente, y dado que T es constante, la distribución se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\{t_{ij}\}} \quad \sum_i \sum_j T_{ij} \left(ln\, T_{ij} - 1 \right)$$

$$s.a.: \quad \sum_j T_{ij} = O_i \qquad (\mu_i)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \qquad (\lambda_j)$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} = C \qquad (\beta)$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

La solución del problema anterior es la siguiente:

$$T_{ij}^{*} = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}$$

donde: $A_i O_i = e^{-\mu_i}$ $B_j D_j = e^{-\lambda_j}$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}} \qquad B_j = \frac{1}{\sum_i A_i O_i e^{-\beta c_{ij}}}$$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

La restricción de costos totales se puede introducir en la función objetivo obteniéndose finalmente:

$$\min_{\{t_{ij}\}} \quad \sum_i \sum_j T_{ij} c_{ij} + \frac{1}{\beta} \sum_i \sum_j T_{ij} \left(ln\, T_{ij} - 1 \right)$$

$$s.a.: \quad \sum_j T_{ij} = O_i \qquad (\mu_i)$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \qquad (\lambda_j)$$

En este último caso se observa la relación entre el modelo de maximización de entropía y el modelo de **Hitchcock** $(\beta \rightarrow \infty)$

MAXIMIZACIÓN DE ENTROPÍA (cont.)

iv) **Propiedades del Modelo de Maximización de Entropía**:

- Presenta un riguroso sustento teórico y entrega solución única.
- Considera los impactos de los niveles de servicio de las redes de transporte (c_{ij}).
- Replica mejor los resultados observados y presenta mejor ajuste estadístico.

DISTRIBUCIÓN EN ESTRAUS

- ESTRAUS considera múltiples:
  - categorías de usuarios (*k*)
  - propósitos de viajes (*p*)

- Recordar la expresión derivada anteriormente:

$$T_{ij} = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta c_{ij}} \Rightarrow$$

- maximización de entropía
- doblemente acotado

- En este caso la expresión para la distribución de viajes viene dada por:

$$T_{ij}^{kp} = A_i^{kp} O_i^{kp} B_j^p D_j^p e^{-\beta^{kp} L_{ij}^{kp}}$$

DISTRIBUCIÓN EN ESTRAUS

$$T_{ij}^{kp} = A_i^{kp} O_i^{kp} B_j^p D_j^p e^{-\beta^{kp} L_{ij}^{kp}}$$

Esta expresión se obtiene resolviendo las condiciones de optimalidad de primer orden del problema de equilibrio simultáneo.

donde L_w^{kp} es el costo representativo (o costo compuesto) para un usuario de categoría k de viajar entre el par de zonas w con propósito p, considerando todos los modos de transporte que realmente tiene disponible:

$$L_{ij}^{kp} = -EMU_{ij}^{kp} = -\ln \sum_n e^{u_{ij}^{kpn}}$$

donde u_{ij}^{kpn} es la función de utilidad del modo *n*, consistentes con los niveles de servicio observados en el proceso de equilibrio

USO DE ESTRUCTURAS

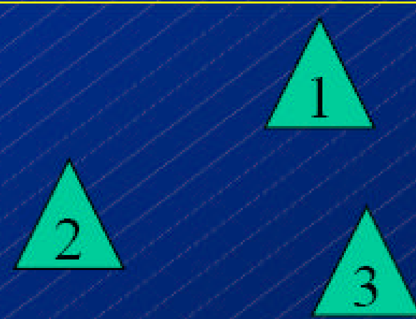
- Modelo entrópico tiende a "distribuir" viajes a falta de información.
- Como resultado se observan matrices con muchas celdas con pocos viajes (prácticamente cero).
- Esto produce en general viajes más cortos, dificultando la reproducción de la partición modal observada.

- Para solucionar este problema se recurre al uso de "estructuras".
- Se definen los pares de zonas (i,j) entre los cuales se permite realizar viajes (más información).
- En la formulación matemática se agrega la restricción que para los pares O/D sin viajes:

$$T_{ij} = 0$$

USO DE ESTRUCTURAS

- Supongamos el siguiente ejemplo de 3 zonas, donde cada una genera y atrae 1 viaje



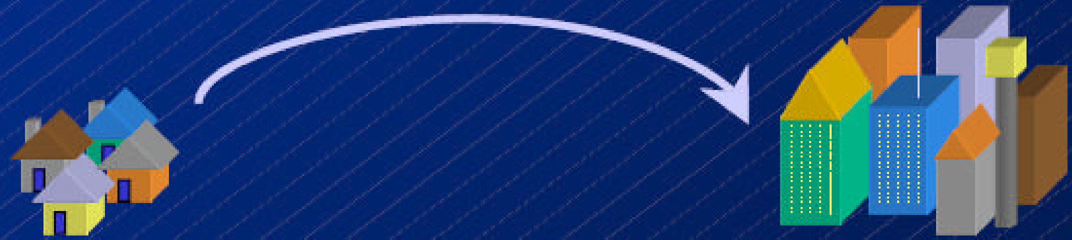
$$T_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 1 & \quad 1 \end{matrix} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 1 & \quad 1 \end{matrix} & \end{array}$$

Distribución Sin estructuras Con estructuras

CONCLUSIONES DISTRIBUCION

- Modelo de distribución permite estimar el número de viajes por propósito y categoría de usuario realizados entre cada par origen-destino.
- Modelo considerado en ESTRAUS corresponde al modelo de maximización de entropía doblemente acotado.
- Es posible recurrir al uso de “estructuras” para mejorar la calidad de la distribución estimada.
- En la práctica se ha constatado que la distribución de viajes es bastante rígida (invariante), sobre todo para proyectos menores.

MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE VIAJES



CI63D

SIMULACIÓN ESTRATÉGICA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE URBANO