PAUTA EJERCICIO 3

CI31A - Mecánica de Fluidos
Prof. Yarko Niño
Aux. Carolina Meruane
Sem. Otoño 2007

Fecha: 8 de mayo de 2007

Problema 1

Un cilindro, de peso W, área transversal A_c y largo H, cuelga de un resorte, de constante k y largo natural l_0, y además está inicialmente sumergido en un líquido de peso específico γ y altura h_0, como se muestra en la Fig. 1a.

(a) (1 pto.) Para esta situación determine el peso W.

(b) (3 ptos.) Si se saca el tapón del fondo del recipiente, de área transversal A, que contiene el líquido, de modo que éste comienza a vaciarse por un orificio de área A_0, determine el largo del resorte en función del tiempo, suponiendo despreciable la aceleración del cilindro durante el proceso (Fig. 1b).

(c) (2 ptos.) Suponiendo que el resorte alcanza a sostener todo el peso del cilindro antes de que se vacíe completamente el líquido, determine el largo máximo del resorte. Cuánto vale la altura del líquido h en el momento en que se alcanza tal condición? En qué tiempo ocurre?

Solución

Parte (a) (1 pto.)

Como el resorte se encuentra en su largo natural sólo el empuje del líquido mantiene al cilindro en la posición indicada en la Fig. 1a. Ocupando la ley de Arquímides, el peso del cilindro esta dado por:

$$W = E = \gamma A_c H \tag{1}$$

Parte (b) (3 ptos.)

Si se supone despreciable la aceleración del cilindro durante el proceso de vaciado del estanque, se tiene que la suma de fuerzas actuando sobre el cilindro debe ser igual a cero:

$$W = k(l - l_0) + E \tag{2}$$

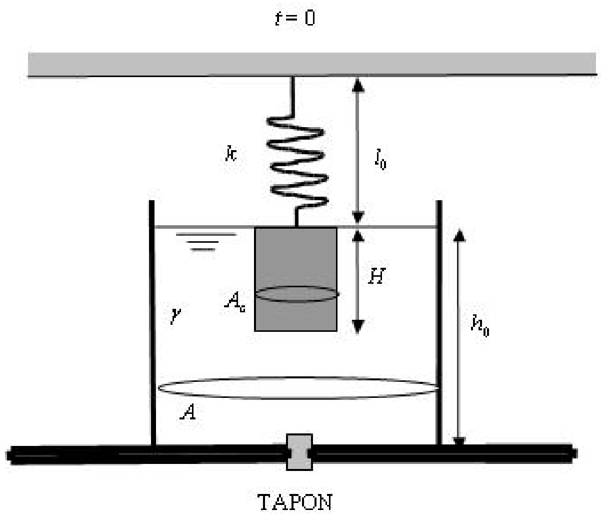


Figura 1a Situación inicial

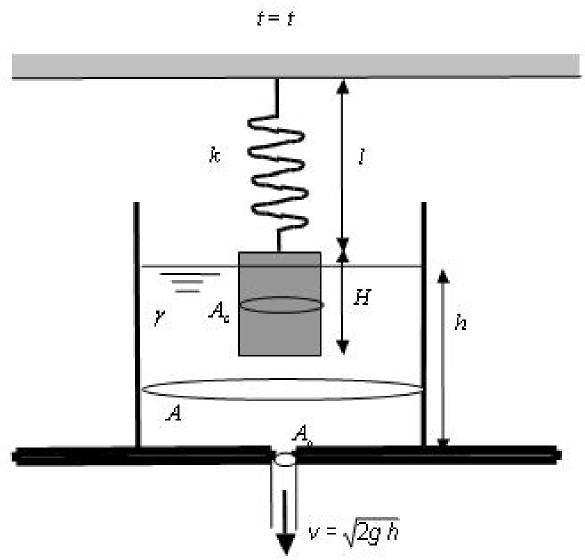


Figura 1b Situación en el instante t

Si se define Δh como la distancia entre la base del cilindro y la superficie del estanque, el empuje del líquido corresponde a:

$$E = \gamma A_c(h - \Delta h) \tag{3}$$

Además, como la distancia entre el techo y la base del estanque se mantiene invariante, se tiene:

$$l_0 + h_0 = l + H + \Delta h \Rightarrow \Delta h = l_0 + h_0 - l - H \tag{4}$$

Reemplazando en (2) y el resultado encontrado en (1),

$$W = \gamma A_c H = k(l - l_0) + \gamma A_c(h - l_0 - h_0 + l + H) \tag{5}$$

$$\Rightarrow k(l - l_0) = \gamma A_c(l_0 + h_0 - h - l) \tag{6}$$

$$\Rightarrow l(k + \gamma A_c) = (k + \gamma A_c)l_0 + \gamma A_c(h_0 - h) \tag{7}$$

$$\Rightarrow l = l_0 + \frac{\gamma A_c}{k + \gamma A_c}(h_0 - h) \tag{8}$$

La altura del líquido, $h = h(t)$, se obtiene de la ecuación de continuidad para fluido incompresible:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Q_{entra} - Q_{sale} \tag{9}$$

Si se supone despreciable el volumen del cilindro (indicación dada durante el ejercicio):

$$A\frac{dh}{dt} = -A_0\sqrt{2gh} \tag{10}$$

Integrando,

$$\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\frac{A_0}{A}\int_0^t dt \tag{11}$$

$$\Rightarrow \sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{\sqrt{2g}}{2}\frac{A_0}{A}t \tag{12}$$

$$\Rightarrow h = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{A_0}{A}t\right)^2 \tag{13}$$

Reemplazando en (8) se obtiene finalmente el largo del resorte en función del tiempo:

$$l(t) = l_0 + \frac{\gamma A_c}{k + \gamma A_c}\left[h_0 - \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{A_0}{A}t\right)^2\right] \tag{14}$$

Parte (c) (2 ptos.)

Si sólo el resorte sostiene el peso, se tiene:

$$W = \gamma A_c H = k(l - l_0) \tag{15}$$

$$\Rightarrow l = \frac{\gamma A_c H}{k} + l_0 \tag{16}$$

Justo en el instante en que el resorte alcanza a sostener todo el peso del cilindro la altura del líquido al interior del estanque corresponde a:

$$h = l_0 + h_0 - (l + H) = h_0 - H(1 + \frac{\gamma A_c}{k}) \tag{17}$$

El tiempo en que ocurre se obtiene de despejar el tiempo de (14) y reemplazar la expresión de l encontrada encontrada en (16):

$$t = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - \frac{k + \gamma A_c}{\gamma A_c}(l(t) - l_0)}\right] \tag{18}$$

Si en t^*, $l(t^*) = (\gamma A_c H)/k + l_0$, entonces:

$$t^* = \frac{A}{A_0}\sqrt{\frac{2}{g}}\left[\sqrt{h_0} - \sqrt{h_0 - H - \frac{\gamma A_c H}{k}}\right] \tag{19}$$

Problema 2

En la Figura se muestra un mezclador de líquidos compuesto por un estanque cilíndrico de altura L y radio R, con dos tuberías de entrada y una de salida de radios iguales a r. Por las tuberías de entrada ingresan caudales constantes de magnitud Q_1 y Q_2 con temperaturas T_1 y T_2, respectivamente. El caudal en la tubería de salida puede ser determinado a partir de la velocidad de salida, dada por:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \tag{20}$$

donde g es la aceleración de gravedad y $h(t)$ es la profundidad del líquido en función del tiempo t. Suponiendo que la densidad del líquido es constante e independiente de la temperatura, se pide:

(a) (3.0 ptos.) Determinar el tiempo que demora en llenarse la mitad del estanque, considerando que el líquido es incompresible e inicialmente el estanque se encuentra vacío.

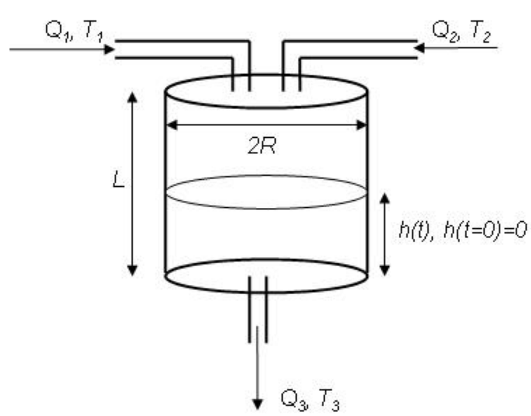
(b) (1.0 pto.) Determinar la altura de equilibrio del nivel en el estanque.

(c) (2.0 ptos.) Considere la situación con el nivel del estanque en equilibrio. Suponga que inicialmente el líquido al interior del estanque tiene una temperatura T_0 y que la mezcla con los líquidos de temperaturas T_1 y T_2 se produce en forma instantánea. Determine una expresión para la variación en el tiempo de la temperatura del líquido en la salida del estanque.

Indicación 1:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(a - b\sqrt{cx}}) = -\frac{1}{b^2 c}\left[2b\sqrt{cx} - 2a \cdot arctanh\left(\frac{b\sqrt{cx}}{a}\right) + a \cdot ln(a^2 - b^2 cx)\right] \tag{21}$$

Indicación 2: A partir de la Primera Ley de la Termodinámica, la concentración de calor puede ser determinada como $c\rho T$, donde ρ es la densidad del fluido, c es el calor específico del fluido y T es la temperatura.



Solución

Parte (a) (3.0 ptos.)

La altura del líquido, $h = h(t)$, se obtiene de la ecuación de continuidad para fluido incompresible (dado que la densidad es constante e independiente de la temperatura):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Q_{entra} - Q_{sale} \tag{22}$$

donde $V(t) = h(t)\pi R^2$, $Q_{sale} = v_{sale}\pi r^2 = \sqrt{2gh(t)}\pi r^2$, $Q_{entra} = Q_1 + Q_2$

$$\Rightarrow \pi R^2 \frac{dh}{dt} = (Q_1 + Q_2 - \pi r^2 \sqrt{2gh}) \tag{23}$$

$$\Rightarrow \int_0^{h(t)} \frac{dh}{(Q_1 + Q_2 - \pi r^2 \sqrt{2gh})} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^t dt \tag{24}$$

Ocupando la indicación 1 dada en el enunciado ($a = Q_1 + Q_2$, $b = \pi r^2$, $c = 2g$, $x = h$):

$$t = -\frac{R^2}{2g\pi r^4} \left[2\pi r^2 \sqrt{2gh} - 2(Q_1 + Q_2) \cdot arcotanh \left(\frac{\pi r^2 \sqrt{2gh}}{Q_1 + Q_2} \right) + (Q_1 + Q_2) \cdot ln \left([Q_1 + Q_2]^2 - \pi^2 r^4 2gh \right) \right] \tag{25}$$

Evaluando en $h(t^*) = L/2$, se obtiene $t^* \approx 22\ min$

Parte (b) (1.0 pto.)

La altura de equilibrio del nivel en el estanque se obtiene cuando $\partial V/\partial t = 0 \Rightarrow Q_{entra} = Q_{sale}$:

$$Q_1 + Q_2 = \sqrt{2gh_{eq}}\pi r^2 \tag{26}$$

Despejando h_{eq}:

$$h_{eq} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2g\pi^2 r^4} \tag{27}$$

Evaluando: $h_{eq} \approx 4{,}7\ m$

Parte (c) (2.0 ptos.)

Ocupando la ecuación del transporte de Reynolds (considerando que la mezcla es instantánea), se tiene:

$$\rho c \pi R^2 h_{eq} \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c (T_1 Q_1 + T_2 Q_2 - T Q_3) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{(T_1 Q_1 + T_2 Q_2 - T Q_3)} = \frac{dt}{\pi R^2 h_{eq}} \tag{29}$$

Integrando (con la condición inicial $T(t = 0) = T_0$):

$$ln \left(\frac{T_1 Q_1 + T_2 Q_2 - T Q_3}{T_1 Q_1 + T_2 Q_2 - T_0 Q_3} \right) = -\frac{Q_3}{\pi R^2 h_{eq}} t \tag{30}$$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{T_1Q_1 + T_2Q_2}{Q_3} - \frac{T_1Q_1 + T_2Q_2 - T_0Q_3}{Q_3} exp\left(-\frac{Q_3}{\pi R^2 h_{eq}} t\right) \tag{31}$$

Ocupando la ecuación de conservación de masa en régimen permanente ($Q_3 = Q_1 + Q_2$) y reemplazando la expresión de h_{eq} encontrada en la parte (b), se llega finalmente a:

$$\Rightarrow T(t) = \frac{T_1Q_1 + T_2Q_2}{Q_1 + Q_2} - \frac{T_1Q_1 + T_2Q_2 - T_0(Q_1 + Q_2)}{Q_1 + Q_2} exp\left(-\frac{2g\pi r^4}{R^2(Q_1 + Q_2)} t\right) \tag{32}$$

Notar que cuanto $t \to \infty$, $T_\infty = (T_1Q_1 + T_2Q_2)/(Q_1 + Q_2)$, es decir, la temperatura en el equilibrio es independiente de la temperatura inicial (esto es sólo un comentario, no es necesario que los alumnos lo pusieran).