Clase Auxiliar 1

1.- Descripción Informal de un Modelo

Se describen las componentes del modelo, las variables descriptivas y las interacciones entre componentes.

- Las componentes y sus variables deben reflejar la parte del sistema real que se quiere estudiar.
- Para describir un modelo se puede comenzar por preguntar:
  - ¿Cuál es la información que se quiere obtener de la simulación?
  - ¿Qué parte del sistema real la origina?
  - ¿Qué otras partes la afectan?
- Definiciones:
  - COMPONENTES

    Partes en que está compuesto el modelo.
  - VARIABLES DESCRIPTIVAS

    También conocidas como variables de estado, proveen información sobre el estado de las componentes en un momento dado. Cambian durante la simulación, es decir, pueden tomar distintos valores.
  - PARÁMETROS

    Son aquellos que se mantienen constantes en una misma simulación, pero pueden variar de una simulación a otra. Puede ser que en una simulación no se encuentren parámetros. En caso de existir es recomendable incluirlos siempre en el modelo.
  - INTERACCIÓN ENTRE COMPONENTES

    Son las reglas que describen las interacciones dentro del modelo, es decir, como las distintas componentes del modelo se afectan entre sí, determinando el comportamiento del modelo a través del tiempo.

2.-Probabilidades

Variable aleatoria

Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia un número real, perfectamente definido, a cada punto muestral. Los espacios muestrales pueden ser:

- discretos: número finito o infinito numerable de elementos
- continuos: número infinito no numerable de elementos

Las v.a. definidas sobre conjuntos discretos se llaman v.a. discretas y aquellas definidas sobre conjuntos continuos, v.a. continuas. Una v.a. puede ser continua aunque tengamos acceso sólo a un conjunto finito de valores. Ejemplo: la presión arterial es una v.a. continua, pero sólo podemos medir un conjunto finito de valores.

Inducción de la probabilidad a variables aleatorias

Las v.a. permiten definir la probabilidad como una función numérica (de variable real).
Ejemplo: Tiramos una moneda 3 veces. Representamos cara por c y cruz por z.

Ω = {ccc, ccz, czc, zcc, czz, zcz, zzc, zzz}

La probabilidad de cada suceso elemental es de 1/8. Por ejemplo para {ccc}, su probabilidad p(ccc)=1/8.

Ahora definiremos una v.a. X, como el número de caras que puden salir al lanzar las tres monedas, que puede tomar los valores {0,1,2,3}. Se buscan todos los puntos muestrales que dan lugar a cada valor de la variable y a ese valor se le asigna la probabilidad del suceso correspondiente.

x	***Sucesos***	$f(x)=p_x$
0	{zzz}	1/8
1	{czz, zcz, zzc}	3/8
2	{ccz, czc, zcc}	3/8
3	{ccc}	1/8

A f(x) le llamamos *función densidad de probabilidad* (fdp), que desgraciadamente funciona de distinta manera en las v.a. discretas que en las continuas. En el caso de las variables discretas, como en el ejemplo, es una función que para cada valor de la variable le asigna su probabilidad.

Para variables continuas la probabilidad de que una variable tome cualquier valor concreto es 0, por lo tanto la fdp sólo permite calcular la probabilidad para un intervalo del tipo $\{X \mid a<X<b\}$, mediante el área bajo la curva de la fdp.

Función de distribución o probabilidad acumulada

Sea $F(x) = p(X \leq x)$, donde p es la probabilidad, entonces denominaremos F a la función de distribución. Entonces para nuestro ejemplo de las monedas:

x	*f(x) = p(x)*	*F(x)*
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

Parámetros característicos de una fdp

Sea f(x) una fdp para la v.a. x, entonces su media queda definida por:

$$\mu_x = E[x] = \begin{cases} \sum_x x f(x) & \text{caso dis.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & \text{caso cont} \end{cases}$$

ya que x es una v.a., entonces h(x) (una función cualquiera de ella) también es una v.a., por lo tanto podemos definir la media de h(x) como:

$$\mu_h = E[h(x)] = \begin{cases} \sum_x h(x) f(x) & \text{c d} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx & \text{c. c.} \end{cases}$$

También podemos definir la desviación típica o varianza de la fdp, como:

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right]$$

aunque para el cálculo se suele usar esta otra fórmula equivalente:

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \mu_X^{\ 2}$$

¿Qué mide la varianza? Mide la dispersión de la variable alrededor de la media.

Problemas

Problema #1 (Basado en clase auxiliar por Carlos Castro)

Una empresa del área tecnológica está encargada de realizar un nuevo tipo de de reloj digital para lanzar al mercado. Ante esto, le encarga a usted que realice el comienzo de la simulación, por lo que debe hacer, como una primera instancia, una descripción informal del modelo representado por un reloj digital con 2 dígitos por campo (en horas, minutos y segundos).

Problema #2 (Basado en P1 Control 1, Otoño 2006)

Haga el diagrama de influencias del siguiente caso:

La industria automotriz de EE.UU. Está concentrada en la producción de automóviles grandes. Así , si los consumidores aumentan su preferencia por coches pequeños, disminuyen las ventas de automóviles norteamericanos grandes, y, por supuesto, crecen las ventas de autos importados. Por otro lado, si el costo de los materiales llega a aumentar, también lo hace el valor de venta de los coches grandes fabricados en USA, y en consecuencia, aumenta la preferencia de los consumidores por los automóviles pequeños. Esto último también ocurre, por supuesto, si aumenta el costo de la gasolina.

En los últimos años, los fabricantes norteamericanos han optado por fabricar más bien automóviles medianos (compactos), lo que ha incrementado sus utilidades. Esta tendencia ha ocurrido como consecuencia del costo cada vez mayor de los materiales (materias primas). La construcción de automóviles compactos, a su vez, ha afectado negativamente las ventas de coches importados. Los fabricantes norteamericanos han reconocido que en su decisión de aumentar la fabricación de medianos influyó el aumento previo de las ventas de autos importados.

No obstante lo anterior, las grandes utilidades de los fabricantes de USA provienen de sus ventas de autos grandes. Y si tuvieran muchas utilidades, no dudarían en disminuir su producción de autos medianos.

Solución

Problema #1

- Componentes:
  HORAS, MINUTOS, SEGUNDOS
- Variables Descriptivas:
  -Para HORAS:
    DECIMAS_H: con rango {0, 1, 2}; DECIMAS_H=x significa que el dígito de las décimas de la hora es x.
    UNIDADES_H: con rango {0, ..., 9}; UNIDADES_H=x significa que el dígito de las unidades de la hora es x.
  -Para MINUTOS:
    DECIMAS_M: con rango {0, 1, ..., 5}; DECIMAS_H=x significa que el dígito de las décimas de los minutos es x.
    UNIDADES_M: con rango {0, ..., 9}; UNIDADES_H=x significa que el dígito de las unidades de los minutos es x.
  -Para SEGUNDOS:
    DECIMAS_S: con rango {0, ..., 5}; DECIMAS_H=x significa que el dígito de las décimas de los segundos es x.
    UNIDADES_S: con rango {0, ..., 9}; UNIDADES_H=x significa que el dígito de las unidades de los segundos es x.

- Parámetros:
  no se identifican en el problema.

- Interacciones entre componentes:
  1. Cuando UNIDADES_S en SEGUNDOS vale x, en el siguiente intervalo de tiempo valdrá (x+1)%10.
  2. Cuando UNIDADES_S en SEGUNDOS vale 9, y DECIMAS_S vale x, en el siguiente intervalo de tiempo DECIMAS_S tomará el valor (x+1)%6.
  3. Cuando DECIMAS_S vale 5, UNIDADES_S 9 y UNIDADES_M en MINUTOS vale x; en el siguiente intervalo de tiempo UNIDADES_M tomará el valor (x+1)%10.
  4. Cuando DECIMAS_S vale 5, UNIDADES_S 9, UNIDADES_M 9 y DECIMAS_M x; en el siguiente intervalo de tiempo DECIMAS_M tomará el valor (x+1)%6.
  5. Cuando DECIMAS_S vale 5, UNIDADES_S 9, UNIDADES_M 9, DECIMAS_M 5 y UNIDADES_H en HORAS vale x; en el siguiente intervalo de tiempo UNIDADES_H tomará el valor (x+1)%10.

6. Cuando DECIMAS_S vale 5, UNIDADES_S 9, UNIDADES_M 9, DECIMAS_M 5, DECIMAS_H en HORAS vale x y UNIDADES_H en HORAS vale 9; en el siguiente intervalo de tiempo DECIMAS_H tomará el valor (x+1)%3.
7. Cuando DECIMAS_S vale 5, UNIDADES_S 9, UNIDADES_M 9, DECIMAS_M 5, DECIMAS_H en HORAS vale 2 y UNIDADES_H en HORAS vale 4; en el siguiente intervalo de tiempo DECIMAS_H tomará el valor 0 y UNIDADES_H tomará el valor 0 también.

- Supuestos:
  - El reloj permanece siempre encendido.
  - La unidad de tiempo es en segundos.

Problema #2