

Clase Auxiliar 2

1.- Clasificación de Modelos

Es posible clasificar los modelos según :

TIEMPO (en el cual ocurren los eventos)	TIEMPO DISCRETO (si el tiempo transcurre a “saltos”)	
	TIEMPO CONTINUO (si el tiempo especificado es un flujo continuo)	De eventos discretos
		De ecuaciones diferenciales
RANGO (de las variables descriptivas)	ESTADO DISCRETO (si las variables sólo pueden contener un conjunto discreto de valores)	
	ESTADO CONTINUO (si el conjunto de valores puede ser representado por un número real o intervalos de ellos)	
	ESTADO MIXTO (algunas variables tienen rango discreto y otros rango continuo)	
VARIABLES ALEATORIAS (presencia de ...)	DETERMINÍSTICO (no existen variables aleatorias)	
	ESTOCÁSTICO O PROBABILÍSTICO (hay al menos una variable aleatoria en el modelo)	
INTERACCIÓN CON EL ENTORNO	AUTÓNOMO (aislado del entorno)	
	NO AUTÓNOMO (recibe entradas no controladas por el modelo, a las cuales se debe responder)	

2.- Variables de Estado

Las variables de estado corresponden a un subconjunto de todas las variables descriptivas, de modo que es suficiente conocer el valor actual de ellas para calcular los valores futuros de todas las variables descriptivas del modelo.

Recordemos que nos interesa modelar sistemas reales, con el fin de que a partir de éste modelo sea posible realizar una simulación en un computador. Entonces, en particular, nos interesan los modelos invariantes en el tiempo, o sea aquellos cuyas reglas de interacción que no dependen del tiempo, sino de los valores de sus variables de estado.

Para realizar una simulación en computador, debemos considerar el tiempo discreto, o sea que avanzamos en intervalos constantes de tiempo. Esto lo expresamos así: $t_{i+1} - t_i = h$; $i=1, \dots, N$. Entonces, sea $y_1(i), \dots, y_m(i)$ el conjunto de valores de las variables de estado en t_i , una simulación de la transición a t_{i+1} calcula los valores de estado $y_1(i+1), \dots, y_m(i+1)$, a partir de los cuales es posible calcular las demás variables descriptivas (que no sean de estado ni de entrada), $y_{m+1}(i+1), \dots, y_n(i+1)$ en t_{i+1} . A este de simulaciones les llamaremos *iterativas de tiempo discreto en modelo invariante en el tiempo*.

¿Cómo encontrar variables de estado?

- 1) Identificar variables descriptivas del modelo e interacciones.
- 2) Identificar variables de entrada (externas), si el modelo es no – autónomo.
- 3) Identificar candidatos a variables de estado a partir de la inspección de las interacciones. Si hay variables de las cuales dependen los valores de las demás variables en cada tiempo, estas son candidatas a variables de estado.

Nota sobre modelos no-autónomos

Los modelos no-autónomos tienen variables de entrada **externas** las cuales en ningún caso son variables de estado. Sin embargo hay variables de estado que pueden comportarse como entradas **internas** del modelo. Es importante notar esta sutil diferencia, para no cometer errores buscando los conjuntos de las variables de estado.

Problemas

Problema #1 (basado en P1, control #1, 2001/02)

Suponga que dos vías de ferrocarril se juntan a una sola, según ilustra la Figura 1. En la unión hay un interruptor manual, que sirve para conectar una de las vías incidentes a la final. El interruptor tiene tres posiciones: vía superior conectada, vía inferior conectada y todas las vías desconectadas. Cada vía incluyendo la final, tiene un semáforo que indica la conectividad que sigue. Estos semáforos se describen así:

- Semáforos de las vías incidentes: tienen 2 luces (verde y roja), con el significado habitual: por ejemplo, si está encendida la luz verde, que la vía está conectada, y por lo tanto, un tren puede seguir porque continuará en la vía final.
- Semáforo de la vía final: tiene 2 luces (verde y roja), con el mismo significado anterior, pero además hay dos flechas luminosas: una apuntando hacia la vía superior y otra hacia la vía inferior. Sólo cuando está encendida la luz verde, también está encendida una de las flechas luminosas, dando una idea al conductor del tren hacia cuál de las vías continuará cuando pase la intersección.

Se pide hacer una descripción informal de un modelo de este sistema. Indique los supuestos que considere necesarios.

Clasificar este modelo según si es autónomo o no (indicar justificación breve)

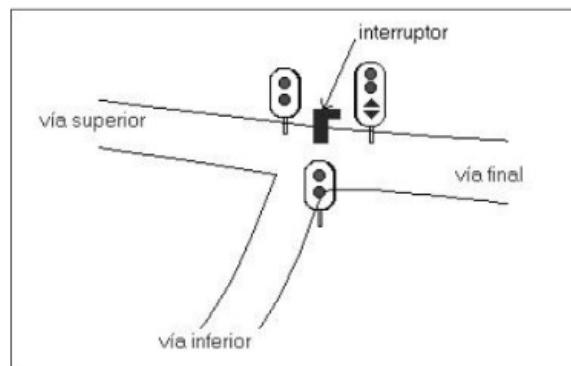


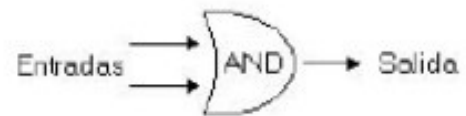
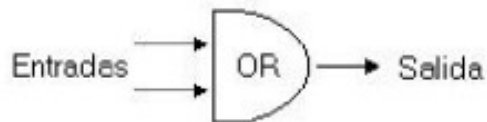
Figura 1. Intersección de vías de ferrocarril.

Problema #2

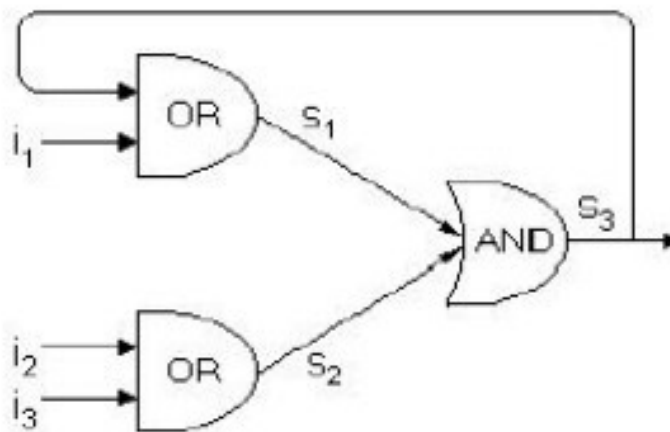
Suponga que existen dos dispositivos, AND y OR, con las siguientes características:

OR tiene dos entradas, cada una de ellas con valores posibles, 0 y 1. Si alguna (o ambas) de estas entradas tiene un valor 1, en la siguiente unidad de tiempo, la salida tiene valor 1. En caso contrario, tiene valor 0.

AND tiene dos entradas, cada una con dos valores posibles, 0 y 1. Si alguna (o ambas) de estas entradas tiene un valor 0, en la siguiente unidad de tiempo, la salida tiene valor 0. En caso contrario, tiene valor 1.



Suponga un sistema como el siguiente con estos dispositivos, s_3 es variable de salida, i_1, i_2, i_3 con variables de entrada. Los cables de conexión son instantáneos.



Demuestre que $\{s_1, s_2, s_3\}$ es un conjunto de variables de **estado**.

Problema #3

En la ciudad de Praga, el reloj de Ayuntamiento, construido en los siglos XV y XVI, funciona entre las 9:30 y las 17:30 en la secuencia que se indica a continuación.

Tres minutos antes de una hora (es decir, 9:57; 10:57; etc.), la figura de La Muerte (un esqueleto) tira de una cuerda que lleva en la mano derecha. Dos minutos antes de la hora, desfilan arriba del reloj las figuras de los Doce Apóstoles. Un minuto antes de la hora, un gallo canta, y a la hora exacta, el reloj mismo marca la hora. Un minuto después de la hora, se mueven simultáneamente las figuras de El Turco, La Vanidad y La Avaricia. Cada una de estas actividades suponga que duran (cada una de ellas) exactamente un minuto. El resto del tiempo, los diversos componentes están quietos.

Especifique las variables de estado para el sistema descrito por el funcionamiento de este singular reloj.

Solución

Problema #1

- **Componentes:**

INTERRUPTOR, SEMAFORO_S, SEMAFORO_I, SEMAFORO_F

- **Variables descriptivas:**

- Para INTERRUPTOR:

POSICION: con rango {SUPERIOR, INFERIOR, DESCONECTADO}

- Para SEMAFORO_S:

LUZ_S: con rango {ROJO, VERDE}; LUZ_S = x significa que el semáforo de la vía superior está en color x.

- Para SEMAFORO_I:

LUZ_I: con rango {ROJO, VERDE}; LUZ_I = x significa que el semáforo de la vía inferior está en color x.

- Para SEMAFORO_F:

LUZ_F: con rango {ROJO, VERDE}; LUZ_F = x significa que el semáforo de la vía final está en color x.

FLECHA: con rango {ARRIBA, ABAJO, NINGUNA}; FLECHA=ARRIBA significa que la flecha superior está encendida, FLECHA=ABAJO significa que la flecha inferior está encendida y FLECHA=NINGUNA significa que ninguna flecha está encendida.

- **Interacciones entre componentes:**

- (1) Cuando la POSICION del INTERRUPTOR es puesta en SUPERIOR: LUZ_S es puesta en VERDE, LUZ_I es puesta en ROJO, LUZ_F es puesta en VERDE, FLECHA de ARRIBA es encendida.
- (2) Cuando la POSICION del INTERRUPTOR es puesta en INFERIOR: LUZ_S es puesta en ROJO, LUZ_I es puesta en VERDE, LUZ_F es puesta en VERDE, FLECHA de ABAJO es encendida.
- (3) Cuando la POSICION del INTERRUPTOR es puesta en DESCONECTADO: LUZ_S es puesta en ROJO, LUZ_I es puesta en ROJO, LUZ_F es puesta en ROJO, FLECHA es NINGUNA.

- **Parámetros:**

No se identifican en el problema

- **Supuestos:**

- 1) Las flechas permanecen encendidas o apagadas y los semáforos con los valores tomados en forma indefinida, a menos que se cambie la posición del interruptor de acuerdo a las reglas precedentes.
- 2) Los semáforos están sincronizados con el interruptor de modo que todos cambian sus colores cuando cambia la posición del interruptor.

El sistema estudiado es no autónomo, ya que recibe una entrada que no es controlada por el sistema pero que afecta su estado a través del interruptor, que debe ser controlado por una persona.

Problema #2

Para demostrar que una variable es de estado, es necesario mostrar dos cosas:

- 1) Que su valor en $t+1$ puede ser determinado a partir de variables de estado y de entrada de un tiempo t .
- 2) Que su valor en t determina el valor en t de las demás variables descriptivas.

En este caso el conjunto de variables de estado corresponde a todo el conjunto de variables descriptivas. Así que solo debemos demostrar el ítem 1.

Entonces debemos demostrar que el valor de $s1(t+1)$, $s2(t+1)$ y $s3(t+1)$ se puede obtener a partir de $i1(t)$, $i2(t)$, $i3(t)$, $s1(t)$, $s2(t)$ y $s3(t)$.

A partir del diagrama obtenemos entonces, las siguientes relaciones:

$$s1(t+1) = s3(t) + i1(t)$$

$$s2(t+1) = i2(t) + i3(t)$$

$$s3(t+1) = s1(t) + s2(t)$$

Así, hemos demostrado que los valores de las variables $s1$, $s2$, $s3$ en $t+1$ pueden ser calculados a partir de los valores de las variables especificadas en un tiempo t , por lo tanto, se demuestra que $s1$, $s2$ y $s3$ son variables de estado.

Problema #3

Tenemos las siguientes variables descriptivas para la componente del sistema (RELOJ_AYUNTAMIENTO):

HORA – con rango $\{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 23\}$ (también se puede modelar con un reloj de 12 horas)

MINUTOS – con rango $\{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 59\}$

MUERTE, APOSTOLES, GALLO, TURCO, AVARICIA, VANIDAD $\in \{\text{MUEVE, QUIETO}\}$

(recuerden que las figuras del turco, la avaricia y la vanidad también se pueden modelar como una sola componente.)

RELOJ $\in \{\text{MARCA, QUIETO}\}$

Interacciones:

Propuesto.

Entradas:

El sistema es autónomo.

Candidatos a Variable de Estado:

Previamente: estableceremos nuestra unidad de tiempo en minutos, ya que no nos interesa que ocurra con los segundos en este modelo, por ende $t_{i+1} - t_i = 1$ minuto.

Sigamos: Como para conocer el valor de todas las variables descriptivas es necesario saber el valor de HORA y MINUTOS, estos serían nuestros candidatos. Ahora, verifiquemos si lo son:

HORA(t) si MINUTOS(t) < 59

HORA(t+1) = HORA(t)+1 si MINUTOS(t) = 59 y HORA(t) < 23
0, si HORA(t) = 23 y MINUTOS(t) = 59

=> HORA(t+1) se puede calcular a partir de los valores de MINUTOS(t) y HORA(t)

MINUTOS(t+1) = MINUTOS(t) + 1 si MINUTOS(t) < 59
0, si MINUTOS(t) = 59

=> MINUTOS(t+1) se puede calcular a partir del valor de MINUTOS(t)

Verifiquemos ahora si es posible calcular los valores del resto de las variables en un tiempo t a partir de los valores de HORA(t) y MINUTOS(t)

MUERTE(t) = MUEVE, si $9 \leq \text{HORA}(t) \leq 16$ y MINUTOS(t) = 57
QUIETO, si no

APOSTOLES(t) = MUEVE, si $9 \leq \text{HORA}(t) \leq 16$ y MINUTOS(t) = 58
QUIETO, si no

GALLO(t) = MUEVE, si $9 \leq \text{HORA}(t) \leq 16$ y MINUTOS(t) = 59
QUIETO, si no

RELOJ(t) = MARCA, si $10 \leq \text{HORA}(t) \leq 17$ y MINUTOS(t) = 0
QUIETO, si no

(TURCO, VANIDAD, AVARICIA)(t) = (MUEVE, MUEVE, MUEVE) si $10 \leq \text{HORA}(t) \leq 17$ y
MINUTOS(t) = 1
(QUIETO, QUIETO, QUIETO) si no

=> Es posible calcular el valor de todas las variables a partir de HORA y MINUTOS en t.

Por lo tanto, se muestra que HORA y MINUTOS son variables de estado para el modelo estudiado.