Universidad de Chile	Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Tarea 3 MA34A

Diciembre, 2006

Profesor: Fernando Lema
Auxiliar: Francisco Silva

P1. Considere una sucesión de variables aleatorias $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $\mathbb{E}(Y_i)=\rho^i$ y $\mathrm{Var}(Y_i)=\sigma_i^2$. Sea X v.a discreta tal que :

$$\mathbb{P}(X=k)=(\frac{1}{2})^k \quad k=1,2,...$$

Para la v.a $Z=\sum_{i=1}^{X} Y_i$, determine $\mathbb{E}(X)$.

P2. Considere una v.a X con distribución beta de parámetros α,β ($X \rightsquigarrow \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$).

a)Si $X \rightsquigarrow \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$ calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.
b)Sean $Y_1 \rightsquigarrow G(\alpha_1,\beta)$, $Y_2 \rightsquigarrow G(\alpha_2,\beta)$ v.a gamma's independientes. Pruebe que $U=\frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \rightsquigarrow \mathrm{Be}(\alpha_1,\alpha_2)$ y que U es independiente de $V=Y_1+Y_2$.
c) Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \rightsquigarrow \mathrm{Be}(\alpha,\beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote, calcule la probabilidad de que sea defectuoso.

P3. Sean $X_i \rightsquigarrow U(0,1)$ $\imath=1,...,n$ independientes. Determine, usando la función generadora de momentos, la distribución de la v.a $Y=-2\ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)$. ¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule $\mathbb{P}(Y>55)$ si n=40.

P4. Sea X una v.a tal que $\mathbb{E}(X^k)=(k+1)!2^k$, $k=1,2,..$ Determine, usando la función generadora de momentos, la distribución de X.

P5. Suponga que X es una v-a con la siguiente densidad

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-a)}, & \text{si } x\geq a\\ 0, & \text{si } x<a\end{cases}$$

a)Encontrar la f.g.m de X y usarla para calcular $\mathbb{E}(X)$
b)Suponga que la duración de una ampolleta es una v.a con la densidad anterior. Cuando una ampolleta falla es reemplazada por una nueva cuya duración sigue teniendo la misma densidad y las duraciones serán independientes. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 400 horas con probabilidad 0,95 (considere $\lambda=\frac{1}{2}$ y $a=6$).

P6. Un embarque de televisores consta de 50 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad de que se encuentren más de 30 televisores defectuosos en los 50 lotes.

P7.a) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tiene estaturas (H,M) v.a tal que $H \rightsquigarrow N(1.7;(0.1)^2)$ y $M \rightsquigarrow N(1.6;(0.05)^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta con estatura superior a 1.68; calcule la probabilidad de que sea hombre. ¿Cómo cambia su respuesta si resulta con estatura igual a 1.68?
b) El ingreso de las personas (X) puede considerarse una v.a producto de muchas variables independientes (sexo, edad, educación, etc) es decir $X=X_1X_2....X_n$ con $\mathbb{E}(X_i)=\mu_1$ y $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma_i^2$. Determine, para n grande, la densidad de X.

P8. La edad en una gran población de adultos es una v.a normal de media 46 años y desviación estándar de 8 años.
a)Si de la población se extraen n individuos obteniéndose por lo menos uno menor a 50 años,

calcule la probabilidad de obtener al menos uno mayor a 50 años.
b)Si se toman dos adultos, ¿cuál es la probabilidad de que sus edades difieran en menos de 1 año?

P9. Una máquina trabaja un tiempo (antes de fallar) que puede ser modelado como una v.a exponencial de parámetro λ. Cuando falla, la reparación toma un tiempo aleatorio, que se distribuye de forma exponencial de parámetro μ. Si la máquina está buena en $t = 0$, calcule la probabilidad que lo esté en el instatnte t. Como indicación, plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales asociadas al proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si la máquina está buena en t} \\ 1, & \text{si no} \end{cases}$$

P10. Los alumnos llegan a un negocio de fotocopias según un proceso de Poisson de tasa 2 por minuto.
a)(i) Si en un intervalo de 5 minutos llegaron 8 alumnos, calcule la probabilidad de que sólo uno de ellos haya llegado en el último minuto.
(ii) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos alumnos supere los tres minutos.
b)El negocio funciona con tres fotocopiadoras y la atención de un alumno es exponencial con media dos minutos. Cuando un alumno llega y observa a cuatro compañeros se va a otro negocio
(i) Si X_t representa el número de alumnos en el negocio; planteee el diagrama de estados y ecuaciones de balance.

(ii) Si $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$, $P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$, $P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3}$, $P_4 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4}$, es solución de las ecuaciones, calcule numéricamente el tiempo promedio que demora un alumno en el negocio y la proporción de tiempo ocioso que tienen las máquinas.

P11. La sala de emergencia de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deben ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes, los pacientes de tipo A, a una tasa de 4 por hora y los de tipo B, a una tasa de 2 por hora. Cada paciente de tipo A que llega recibe atención de algún equipo médico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 15 minutos. Cada paciente tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 40 minutos.
a)Plantee el proceso a estudiar indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.
b)Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique cómo calcularía la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico está ocioso (cosidere un turno de 24 horas) ¿Cómo cambia su modelo (diagramas de estados) si uno de los equipos médicos es más lento, demorándose en promedio 30 minutos (cuando atiende solo), manteniéndose el resto de las condiciones?

P12.A una gasolinera que cuenta con sólo una bomba de bencina, llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 15 autos por hora.
a)Si entre las 12:00 y 13:00 PM llegaron 15 vehículos, calcule la probabilidad de que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos dos vehículos.
b)Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 5 minutos. Si la bomba se está usando, los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es q_n
(i) Planteee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso "Número de vehículos en la gasolinera".
(ii) Suponiendo

$$q_n = \begin{cases} \frac{n}{3}, & \text{si n=0,1,2,3} \\ 1, & \text{si n} > 3 \end{cases}$$

Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.