Universidad de Chile **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

Tarea 2 MA34A

Diciembre, 2006

PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIAR: FRANCISCO SILVA

P1. En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si ésta cae a lo sumo 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central es una v.a con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900}, & \text{si } -30 \leq x \leq 0 \\ \frac{30-x}{900}, & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

a) Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos k impactos, ¿cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan n bombas?

b)Si $k = 1$, determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la planta con probabilidad $0,99$.

P2. Se dice que una v.a X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0, α $(X_0 > 0, \alpha > 0)$ si su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{si } x \geq X_0 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

a)Calcule $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.
b) Sea $Y = \ln(\frac{X}{X_0})$, determine la densidad de Y.
c)Considere que X representa el ingreso, en miles de pesos, mensual de un grupo de individuos con $X_0 = 200$ y $\alpha = 2$. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar y de manera independiente. Calcule la probabilidad de que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a 300.000.
d)Si a todas las personas que ganan menos de 400.000 se les da un reajuste de un 10% mientras que a aquellos que ganan más de 400.000 se les da 40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.

P3. De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector (X, Y) como X: nº de monos obtenidos, Y: nº de ases obtenidos.
a) Determine la distribución de probabilidades de (X, Y).
b)Determine las distribuciones marginales de X y de Y. Calcule $E(X)$ y $E(Y)$.
c) Determine la distribución condicional de X dado $Y = y$ y la distribución condicional de Y dado $X = x$.
d) Determine la distribución de probabilidades de las variables $M_1 = \text{Max}(X, Y)$ y de $M_2 = \text{Min}(X, Y)$.

P4. Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad X (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad Y (en miles de pesos). Suponga que la densidad conjunta del par (X, Y) está dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{36}, & \text{si } 0 < x < y < 6 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

a)Determine la densidad de la variable G que indica la ganancia por vehículo.

b) Considere sólo la variable Y con densidad

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{y^2}{72}, & \text{si } 0 < y < 6 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Debido a las condiciones económicas imperantes el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. Ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta esté entre 0 y 2000 un uno por ciento en vales de bencina. Si el precio está entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es de 40 pesos. Para el resto entrega una radio de valor 100 pesos. Estudie probabilísticamente la variable monto regalado por automóvil. Calcule su esperanza.

P5. La fuerza magnética H de un punto P ubicado a X unidades de cable con corriente I está dada por $H = \frac{2I}{X}$
a)Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniformemente en $(2, 4)$ e I uniformemente en $(10, 20)$ (ambas v.a's independeintes) calcule la densidad de H.
b Calcule $\mathbb{P}(H > 10|X < 3)$.

P6. Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en $t = 0$, pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en $t = t_1$, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna t_1 horas. También por flojera el operario se va temprano, antes de que termine el proceso, y a todo equipo que en t_2(hora en que se va) esté bueno le asigna t_2 horas.
a)Determine la distribución y esperanza de Y la v.a que indica la duración indicada por el funcionario.
b)Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de Z la v.a que indica la duración indicada por el operario.
c) Si Y se distribuye de manera exponencial de parámetro α independiente de X, calcule $\mathbb{P}(Y > kX))$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
d) Determine la densidad de $Z = X + Y$.

P7. Una fuente luminosa produce en un punto dado una luminosidad L dada por $L = \frac{I}{R^2}$ donde I es la intensidad de la fuente y R es la distancia del punto a la fuente. Suponga que I y R son v.a's independientes con I uniforme en $(1, 2)$ y R exponencial de parámetro 1.
a)Calcule $\mathbb{P}(L > 1|I > 1.5)$
b) Usando T.C.V determine la densidad de L.
c)Calcule la iluminación promedio de puntos ubicados a dos unidades de distancia.

P8. La duración T en horas de cierta máquina es una v.a exponencial de parámetro λ. La máquina tiene costos de funcionamiento de C_1 U.M por hora, y produce mientras funciona un ingreso de C_2 unidades por hora. Para operar la máquina se requiere un especialista que cobra C_3 U.M por hora y que exige ser contratado por un número prefijado de horas H. El pago del especialista es independiente de si la máquina está o no en funcionamiento.
a)Sea U la v.a que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.
b)Determine H de forma de maximizar la utilidad esperada.
c)Suponga que $\alpha = 0,01$, $C_1 = 6$,$C_2 = 20$, $C_3 = 4$ y que $H = 60$. Determine la distribución de probabilidades de U.

P9. En un banco se ha determinado que los clientes piden préstamos por una cantidad aleatoria X de U.M con distribución $\mathbb{P}(X = k) = \{\frac{1}{2}\}^k \quad k = 1, 2, 3....$ Por otro lado se ha realizado un estudio que indica que una persona pagará una proporción Y de lo que solicító $(X = k)$, con densidad $f_Y(y) = (k + 1)y^k \quad 0 < y < 1$. Un cliente es clasificado como seguro si paga más de $\frac{4}{5}$ de lo solicitado.
a)Calcule la probabilidad de que un cliente que pidió k U.M sea seguro.
b)Si un cliente es seguro, calcule la probabilidad de que haya pedido 2 U.M.

P10. Sean X e Y v.a's independientes con densidades

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Encuentre la densidad de la v.a $Z = XY$.