Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

PAUTA - EXAMEN

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Prof: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:** 1 de Diciembre de 2006
Auxiliares:
Renzo Lüttges Cintolesi
José Miguel Vera

Pregunta 1:

a) Calcule mediante integración, el volumen del sólido limitado por el cono $x^2+y^2=4z^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ siendo $z\geqslant 0$.

Solución:
Utilizaremos coordenadas esféricas. Para esto calculamos el ángulo θ_0 del cono, obteniendo $\theta_0 = \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})$. Además el radio de la esfera es $\sqrt{5}$. Luego la región, en coordenadas esféricas queda definida como sigue:

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{5} \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}}) \quad , \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi \quad .$$

Y el volumen será:

$$V = \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} r^2 sen(\theta)\, d\phi\; d\theta\; dr = \left(\frac{r^3}{3} \bigg|_0^{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{-\cos(\theta)}{1} \bigg|_0^{\arccos(1/\sqrt{5})} \right) \cdot 2\pi = \frac{10\pi}{3}(\sqrt{5}-1)$$

b) Calcule la integral Triple $\iiint_V (4x^2+9y^2+36z^2)\, dx\, dy\, dz$ siendo V el interior del elipsoide:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$$

Solución:
Para reducir el elipsoide a una esfera, usamos el cambio de variables: $x = 3u$, $y = 2v$, $w=z$ con lo cual:

$$u^2+v^2+w^2 = 1$$
$$dx\, dy\, dz = 6\, du\, dv\, dw$$
$$f(x, y, z) \rightarrow f(u, v, w) = 36(u^2+v^2+w^2)$$

Donde cambiando a variables a esféricas:

$$r^2 = 1$$
$$du\, dv\, dw = r^2 sen\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \Rightarrow dx\, dy\, dz = 6r^2 sen\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$f(u, v, w) \rightarrow f(r, \theta, \phi) = 36r^2$$

luego el volumen del elipsoide es:

$$V = \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 36r^2 \cdot 6r^2 sen(\theta)\, d\phi\; d\theta\; dr = 6\cdot 36 \cdot 2\pi \left(\frac{r^5}{5} \bigg|_0^1 \right) \cdot \left(\frac{-\cos(\theta)}{1} \bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{864\pi}{5}$$

c) Calcule la integral $\iiint\limits_A x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$ siendo A el conjunto:

$$A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leqslant 1 \ , \ x\geqslant 0 \ , \ y\geqslant 0 \ , \ z\geqslant 0\}$$

Solución:
La región indicada queda definida por:
$0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant z\leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$. Calcularemos la integral directamente:

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x\,y\,z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}(x\,y-x^3\,y-y^3\,x)\,dx\,dy\,dz$$

$$\ldots=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,dx+\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\,dx\right\}=\frac{1}{48} \quad .$$