Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

EXAMEN

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Prof: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:**
Auxiliares: 1 de Diciembre de 2006
Renzo Lüttges Cintolesi
José Miguel Vera

Pregunta 1:
a) Calcule mediante integración, el volumen del sólido limitado por el cono $x^2+y^2=4z^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ siendo $z\geqslant 0$.

b) Calcule la integral Triple $\iiint_V (4x^2+9y^2+36z^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo V el interior del elipsoide:
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$

c) Calcule la integral $\iiint_A x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$ siendo A el conjunto:
$A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leqslant 1 \ ,\ x\geqslant 0 \ ,\ y\geqslant 0 \ ,\ z\geqslant 0\}$

Pregunta 2:
a) Obtener los extremos absolutos y relativos de la función

$$f(x,y) = 3x^2y^2+2x^3+2y^3 \quad \text{en el conjunto} \quad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 4\}$$

b) Se considera la superficie $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0\ ,\ y>0\ ,\ z>0\ ,\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=3\right\}$

i) Obtener el plano tangente a dicha superficie en el punto (1,2,3).
ii) Encontrar el punto de S para el que se hace mínima la suma de las coordenadas $f(x,y,z)=x+y+z$, obteniendo dicho valor.

***Nota:** en las partes a) y b) utilice lagrange cuando corresponda

c) Sea $z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2.

i) Demuestre que al utilizar el cambio de variables $u=x+2y+2 \quad v=x-y-1$, la expresión:

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y^2}=0 \quad \text{se transforma en} \quad 3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0 \ .$$

***Nota:** indique en qué punto está evaluada cada derivada que anote.

ii)Si z no depende de la variable v, entregue una solución de la EDP que no sea ni la función nula ni un polinomio.

Tiempo: 2 horas 30 minutos