UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

Guía de Problemas Control #2

1.-
Analizar la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ para las siguientes funciones (escoja un de los 2 problemas)

i) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

ii) $f(x,y) = \dfrac{e^{-(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|})}}{|y| + e^{-\frac{1}{|x|}}}$

2.- Considere la función de $R^2 \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función en todo su dominio.
b) Determine las derivadas parciales de *f* donde existan.
c) Analice la continuidad de las derivadas parciales en (0,0)
d) Analice la diferenciabilidad de *f* en (0,0)

3.- Analice la continuidad de la función y sus derivadas parciales

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.-
a) Sea $f : \Re \to \Re$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $x = 0$, pero f' no es continua en $x=0$. Calcular $f'(0)$.

b) Sea $f:\Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en (0,0) pero sus derivadas parciales no son continuas.

5.- Analice la continuidad de la función y sus derivadas parciales

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

6.-

a) Considere $z=x^3-3x^2y-2y^3$. Pruebe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=3z$

b) Considere $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ Pruebe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

c) Considere $z=\dfrac{xy}{x+y}$ Pruebe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$

7.- Sea $f:\Re^2 \to \Re$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determine aquellos $\vec{v}\in\Re^2$ para los cuales existe $Df((0,0);\vec{v})$ y estudie la diferenciabilidad de f en (0,0).

8.- Sea $f:\Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determinar para que direcciones existe la derivada direccional de f en (0,0).

9.- Considere $f:\Re^2 \to \Re$ diferenciable. Se define $F:\Re^2 \to \Re$ por

$$F(x,y) = f(\,u(x,y)\,,\, v(x,y)\,)$$

donde $u(x,y) = x+y$ $\quad v(x,y) = sen(x-y)$

a) Demuestre que :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\cos^2(x-y)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

b) Verifique lo anterior para $f(\,u,v\,) = uv$

10- Sean $f, g : \Re^n \to \Re$ diferenciables en $x_0 \in \operatorname{int}(D)$

Sea $\tilde{D} = \{x \in D \,/\, g(x) \neq 0\}$ $\quad con \quad x_0 \in \tilde{D}$

Se define la función $h:\tilde{D} \to \Re$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

a) Demuestre formal y explícitamente que h es diferenciable en x_0 (¿Tiene sentido estudiar la diferenciabilidad de h en x_0 ?)

b) Demuestre que :

$$\nabla h(x_0) = \frac{g(x_0)\nabla f(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

c) Considere las funciones $f(x,y) = x^3\sqrt{xy}$ $\quad g(x,y) = \sqrt{x^3 - y}$. Calcular el gradiente de *(f/g)(x,y)* en forma directa y utilizando la fórmula obtenida en b).

11.- Considere la función $f:\Re^2 \to \Re$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Pruebe que f es continua en (0,0)

ii) Pruebe que f es diferenciable en todo punto distinto de (0,0)

iii) Calcule, para cada $v = (v_1, v_2)$, la derivada direccional Df((0,0) ; v) si es que ésta existe.

iv) Verifique si f es diferenciable en (0,0)

12.- Para las siguientes funciones analice la existencia de límite en (0,0).

a) $f : D \subset R^2 \to R$ con $D = \{(x,y) \in R^2 / y \geq 0\} - \{(0,0)\}$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{xy^{3/2}}{x^2 + y^3}$

b) $f : D \subset R^2 \to R$ con $D = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{x^3 y^3}{(x^5 + y^5)^{4/5}}$

c) $f : R^3 \to R$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{sen(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$

13- Sea $f : U \times [a,b] \to R$ contínua con $U \subseteq R^n$ abierto, tal que existen las derivadas parciales de primer orden y son contínuas. Sea $g : U \to [a,b]$ y $h : U \to [a,b]$ de clase $C^1(U)$.
Se definen:

$$j(x) = \int_a^{g(x)} f(x,t)dt \qquad y(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt$$

Calcule:

a) $\dfrac{\partial j}{\partial x_i}(x)$ i=1,...,n. Justificar

b) $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}(x)$ i=1,...,n. Justificar

c) $f'(a)$ para $a \neq 0$ si $f(a) = \displaystyle\int_a^{a^2} \frac{sen\, ax}{x} dx$

14.- Sea $f : R^2 \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Determinar para qué direcciones existe la derivada direccional de *f* en *(0,0)*.

ii) Sea $l : R \to R^2$ definida por:

$$l(t) = \begin{cases} (t, t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))^T & Si \quad t \neq 0 \\ (0,0) & Si \quad t = 0 \end{cases}$$

Muestre que ë es diferenciable en $t = 0$

iii) Encuentre las derivadas parciales de *f* donde existan.

iv) Estudie la diferenciabilidad de $(f o l)$ en $t = 0$. Concluya acerca de la diferenciabilidad de *f* en *(0,0)*

15.- Estudiar la diferenciabilidad y derivadas direccionales de las siguientes funciones en el origen:

a) $h(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & Si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & Si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $g(x,y)=\begin{cases} (3x^2-2y^2)sen(\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3y^2}}) & Si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & Si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

16.-

i) Sea A una matriz cualquiera de m x n y $b\in R^m$. Se define $f:R^n\to R$ por:

$$f(x)=\| Ax-b\|_2^2$$

Muestre que *f* es diferenciable y calcule $\nabla f(x)$.

ii) Sea $f:R^n\to R$ definida por:

$$f(x)=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} \quad \text{donde } p\geq 1$$

a) Analizar la diferenciabilidad de *f* en *(0,0)*.
b) ¿Para qué direcciones *f* admite derivada direccional en *(0,0)?* Comente.
c) ¿Qué sucede en a) y b) si $f(x)=Max\{|x_i|\}$ dónde el máximo está tomado sobre *i=1, ...,n*?