Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Clase Auxiliar #2

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Renzo Lüttges Cintolesi

Fecha: 15 de Diciembre de 2006

Problema 1:

Demuestre que el espacio $C[a,b]$ (las funciones continuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$) es un Banach con la métrica $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. (Recuerde que un espacio se dice de Banach cuando las sucesiones de Cauchy convergen en él).

Problema 2:

Sea E un e. v. n. y sea $A \subseteq E$. Se define la Frontera de A como sigue:

$$Fr(A) = \partial A = \{x \in E \,/\, B(x,\epsilon)\cap A \neq \phi \ \wedge\ B(x,\epsilon)\cap A^c \neq \phi \quad \forall \epsilon>0\} \ .$$

demuestre las siguientes propiedades relacionadas con la frontera:

1. $\bar{A} = A \cup Fr(A)$
2. $Fr(A) = Fr(A^c)$
3. $Fr(A) = \bar{A} \,/\, \mathring{A}$
4. $\mathring{A} = A \,/\, Fr(A)$
5. $Fr(A) = \bar{A} \cap \bar{A^c}$
6. $Fr(\bar{A}) \subseteq Fr(A) \ \wedge\ Fr(\mathring{A}) \subseteq Fr(A)$ (dé un ejemplo donde los 3 conjuntos sean distintos)
7. $Fr(A\cup B) \subseteq (Fr(A)\cup Fr(B))$ (donde A puede ser distinto de B). Muestre que la igualdad se tiene cuando $\bar{A}\cap\bar{B} = \phi$.

Problema 3 [Control 1 Otoño 2005]:

Considere el espacio de Banach $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$. Para cada conjunto A, determine el interior, adherencia y frontera. Indique si son abiertos, cerrados u otros. Dibuje cada conjunto.

1. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1)$
2. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cdot x_2 = 0\} \quad k = 2$
3. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\} \quad k = 2$
4. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 4 = 0\} \quad k = 2$