Control 3 MA22A Cálculo en Varias Variables
Semestre Otoño 2005

Prof: Marcelo Leseigneur
Auxs: Rodrigo Assar, Sebastián Court

Pregunta 1.-

(a) (i) (0.5 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con un punto estacionario en x^*. Demuestre que $\nabla f(x_k) \perp \nabla f(x_{k+1})$, donde x_k y x_{k+1} son dos iteraciones sucesivas del método del gradiente.

(ii) (1.5 ptos.) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n)$ con un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(\overline{x}) = 0$ y $H_f(\overline{x})$ (Hessiano de f) definido positivo.
Se demuestra que existe una bola $B(\overline{x}, \varepsilon)$, tal que $H_f(x)$ es definido positivo $\forall x \in B(\overline{x}, \varepsilon)$ (no lo pruebe).
Considere el método del gradiente dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k),$$

donde $\lambda_k \cong \arg \min\limits_{\lambda \geq 0} f(x_k - \lambda \nabla f(x_k))$.
El propósito del problema es estimar el paso λ_k de la siguiente manera:
Considere que x_k es la k-ésima iteración del método del gradiente partiendo de un x_0 dado y que $x_k \in B(\overline{x}, \varepsilon)$.
Proceda como sigue:
1) Escriba el desarrollo de Taylor de orden 2 en torno a x_k.
2) Evalue la expresión anterior en $x_k - \lambda \nabla f(x_k)$ y note que se trata de una función de λ.
3) Resuelva el problema $\min\limits_{\lambda \geq 0} P(x_k - \lambda \nabla f(x_k))$ donde $P(\lambda)$ es el polinomio encontrado en 1)
4) Deduzca que $\lambda_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|_2^2}{\nabla f(x_k)^t H_f(x_k) \nabla f(x_k)}$.

(b) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable tal que $\|\nabla F(x,y)\| \neq 0 \ \forall x, y$. Pruebe que la curvatura de las curvas de nivel de F viene dada por:

$$\kappa = \frac{\left| (\frac{\partial F}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|}{\|\nabla F\|^3}$$

Para esto proceda de la siguiente manera:

(i) (0.5 pto.) Pruebe que $\nabla F \perp \widehat{T}$,donde $\widehat{T}$ es el vector tangente (unitario) a la curva de nivel, y escriba $\widehat{T}$ en función de las derivadas de F.
Indicación: Sin perdida de generalidad, suponga que una curva de nivel de constante C se puede parametrizar por $\sigma(s) = (x(s), y(s))$ con $\left\| \frac{d\sigma}{ds} \right\| = 1$.
Además se cumple que $F(x(s), y(s)) = C$.
(ii) (0.5 pto.) Pruebe que ∇F y $\frac{d\widehat{T}}{ds}$ son paralelos, esto es, existe $\alpha(s)$ tal que

$\frac{d\widehat{T}}{ds} = \alpha(s)\nabla F$

(iii) (1.5 pto.) Encuentre una expresión para $\frac{d\widehat{T}}{ds}$.

(iv) (1.5 pto.) Usando todo lo anterior concluya la expresión para la curvatura.

Indicación: Recuerde que $\kappa = \left\| \frac{d\widehat{T}}{ds} \right\|$

Pregunta 2.- Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, t) = (x + y + t, xyt + \sin(xyt))$

(a) (2*ptos.*) Pruebe que f define a x e y como función implícita de t, de clase infinito, en torno del punto $(-1, 0, 1)$.
Más específicamente, pruebe que existe U un conjunto abierto al cual pertenece $t_0 = 1$ y una función de clase infinito $h = (h_1, h_2) : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(1) = (-1, 0)$ y

$$\text{(Ec.)} \quad f(h_1(t), h_2(t), t) = 0 \quad \forall t \in U.$$

(b) (3*ptos.*) Demostrar que la función $g(t) = \frac{1}{2}t^2 + h_1(t) + h_2(t)$ tiene un mínimo local en $t = 1$.
Para ello use las igualdades dadas por (Ec.) derivando las veces que requiera para obtener $h_1'(1)$, $h_2'(1)$, $h_1''(1)$ y $h_2''(1)$. Finalmente obtenga que $g'(1) = 0$, calcule $g''(1)$ y concluya.

(c) (1*pto.*)
(i) Use la expansión de Taylor de segundo orden (junto con la convergencia del error) de g en torno a un punto adecuado, para probar que:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que

$$t \in [1 - \delta, 1 + \delta] \Rightarrow |h_1(t) + h_2(t) + t| < \varepsilon |t - 1|^2.$$

Con ello, pruebe que existe $\gamma > 0$ tal que

$$t \in [1 - \gamma, 1 + \gamma] \Rightarrow |h_1(t) + h_2(t)| < |t - 1|^2 + |t|.$$

(ii) Considere ahora la función

$$G(t, s) = \frac{1}{2}(t^2 - s^2) + (h_1(t) - h_1(s)) + (h_2(t) - h_2(s)).$$

Muestre que $(t, s) = (1, 1)$ es punto silla para G y encuentre la aproximación de Taylor de segundo orden de G en torno a dicho punto.

Pregunta 3.- Suponga que se tiene n puntos en el plano como resultado por ejemplo de observar dos variables en un conjunto de individuos, (x_1, y_1),. . ., (x_n, y_n). Se desea hallar una función que se ajuste lo "mejor" posible al conjunto de observaciones.

(a) La función más simple a probar es una línea recta (denominada modelo lineal simple):

$$y = m \cdot x + b,$$

donde m y b son los parámetros que determinan la recta.
Como los puntos no están necesariamente sobre una recta, para cada par de puntos existe un error asociado e_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que:

$$y_i = mx_i + b + e_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Los errores o residuos pueden ser positivos, negativos o nulos.
Una manera de determinar m y b es a través del criterio denominado de mínimos cuadrados, que se expresa como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} (PMC) \quad Min \quad & \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ s.a. \quad & y_i = mx_i + b + e_i \\ & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Se pide:

(i) Transforme el problema anterior en un problema sin restricciones, ¿cuáles son las incógnitas?
(ii) Resuélva el problema sin restricciones y pruebe que se trata efectivamente de un mínimo. ¿Es global? ¿Es único?
(iii) ¿Qué condición impodría sobre los datos para que el problema anterior siempre tenga solución?

(b) Suponga ahora que los datos no quedan bien representados por una línea recta (segundo gráfico de la figura):

Entonces puede surgir otro modelo que relacione mejor los datos, por ejemplo una parábola:

$$y = a + bx + cx^2$$

Nuevamente se necesita determinar los coeficientes a, b y c por medio del criterio de mínimos cuadrados.

Se pide:

(i) Formular el problema de optimización asociado, sin restricciones y bajo el siguiente formato:

$$\begin{aligned} Min \quad & \|Q\vec{x} - \vec{d}\|_2^2 \\ s.a. \quad & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Donde $Q \in \mathbb{M}_{n\times 3}(\mathbb{R})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$.

Determine explícitamente Q, $\vec{x}$ y $\vec{d}$.
(ii) Resuelva matricialmente el problema anterior y dé condiciones para la existencia de la solución.

(c) Lo anterior ahora se puede generalizar al caso de n observaciones que se desean ajustar por un polinomio de grado $m-1$ ($m \ll n$).
Se pide:
(i) Plantear el problema de optimización asociado de manera matricial.
(ii) Resolver dicho problema.

Tiempo: 3.5 hrs.