Solución

(a) Apliquemos el teorema de la función implícita a $f(x,y,t) = (x+y+t,\ xyt + \operatorname{sen}(xyt))$ en el punto $(-1,0,1)$.
Es fácil ver que $f(-1,0,1) = (0,0)$ y que f es de clase infinito en todo $\mathbb{R}^3$.
Llamemos $f_1(x,y,t) = x+y+t$
$f_2(x,y,t) = xyt + \operatorname{sen}(xyt)$, entonces

$$\frac{\partial f_1(x,y,t)}{\partial x} = 1 \ ; \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y,t) = 1$$

$$\frac{\partial f_2(x,y,t)}{\partial x} = yt + yt\cos(xyt)$$

$$\frac{\partial f_2(x,y,t)}{\partial y} = xt + xt\cos(xyt).$$

Con lo cual $J_{f_{x,y}}(-1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ que claramente es invertible.
En consecuencia, por el T.F. Implícita existe una vecindad U del punto $t_0 = 1$ y una única función $h: U \to \mathbb{R}^2$ que es de clase infinito al serlo f y tal que $h(1) = (-1,0)$ y $f(h_1(t), h_2(t), t) = (0,0)$ para todo $t \in U$.

(b) La función $g: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase infinito en U por ser la suma de tres funciones de clase infinito en U. Por lo tanto tendrá un mínimo local en $t=1$ ssi verifica que $g'(1) = 0$ y $g''(1) > 0$. Para calcular las primera y segunda derivada de g es necesario calcular las derivadas de h_1 y h_2 en el punto $t=1$.