

Capítulo 2

Diferenciación de funciones vectoriales

En las aplicaciones nos encontramos a menudo con la necesidad de usar funciones vectoriales de varias variables: una función vectorial de una variable define una curva, una función vectorial de tres componentes y dos variables define una superficie, una distribución de cargas eléctricas crea un campo eléctrico que se describe por medio de una función vectorial de tres componentes y tres variables, etc. En la primera parte de este tema establecemos los conceptos de función vectorial diferenciable y matriz jacobiana. El resultado fundamental de esta primera parte es la regla de la cadena que nos muestra cómo se obtienen las derivadas parciales de una función compuesta $f \circ g$ en términos de las derivadas parciales de f y de g . A continuación daremos diversas aplicaciones de la regla de la cadena para finalizar esta primera parte con la definición del jacobiano. La segunda parte del tema se centra en el cálculo de derivadas de funciones definidas de forma implícita, es decir, de las que no conocemos su expresión.

2.1. Funciones vectoriales diferenciables

Definición 2.1. Sean f_1, \dots, f_m funciones definidas en un subconjunto D de \mathbb{R}^n . la función definida por

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m,$$

se dirá que es una función vectorial de n variables y m componentes y suele denotarse por $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$.

Definición 2.2. Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ una función vectorial. Se dice que \mathbf{f} es **diferenciable** en \mathbf{x}_0 cuando lo son todas sus funciones componentes.

Si \mathbf{f} es diferenciable en \mathbf{x}_0 la matriz de orden $m \times n$ cuyas filas son los gradientes de cada componente recibe el nombre de **matriz jacobiana** de \mathbf{f} en el punto \mathbf{x}_0 y se denota por $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$.

Ejemplo 2.1.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida $f(x, y) = (e^{xy}, x^2 + y, 2x^3y^2)$. Calcular la matriz jacobiana en el punto $(1, 3)$

Solución:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1(1, 3)}{\partial x} &= ye^{xy}|_{(1,3)} = 3e^3 \\ \frac{\partial f_1(1, 3)}{\partial y} &= xe^{xy}|_{(1,3)} = e^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla f_1(1, 3) = (3e^3, e^3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_2(1, 3)}{\partial x} &= 2x|_{(1,3)} = 2 \\ \frac{\partial f_2(1, 3)}{\partial y} &= 1|_{(1,3)} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla f_2(1, 3) = (2, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_3(1, 3)}{\partial x} &= 6x^2y^2|_{(1,3)} = 54 \\ \frac{\partial f_3(1, 3)}{\partial y} &= 4x^3y|_{(1,3)} = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla f_3(1, 3) = (54, 12)$$

Así pues, la matriz jacobiana en el punto $(1, 3)$ es:

$$\begin{pmatrix} 3e^3 & e^3 \\ 2 & 1 \\ 54 & 12 \end{pmatrix}$$

Para facilitar la comprensión, vamos a desarrollar lo que resta de este apartado para el caso de funciones de dos variables y dos componentes. Si $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , sus dos componentes son diferenciables en dicho punto y, por tanto, existen los gradientes $\nabla f_i(x_0, y_0)$ ($i = 1, 2$). La matriz jacobiana de \mathbf{f} en el punto (x_0, y_0) tiene la forma

$$\mathbf{f}'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Si necesitamos un valor aproximado de la diferencia $\mathbf{f}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \mathbf{f}(x_0, y_0)$, para valores pequeños de Δx y Δy , basta recordar que cada componente $f_i(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) -$

$\mathbf{f}(x_0, y_0)$ de la diferencial vectorial anterior puede aproximarse por $df_i(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y) = \nabla f_i(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)$, puesto que cada f_i es diferenciable en (x_0, y_0) . Si definimos la diferencial de la función vectorial por

$$d\mathbf{f}(x_0, y_0; \Delta x, \Delta y) = (\Delta x, \Delta y) \cdot \mathbf{f}'(x_0, y_0)^t = (\Delta x, \Delta y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^t$$

entonces la diferencial es un vector cuyas componentes son aproximaciones de las correspondientes componente $\mathbf{f}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \mathbf{f}(x_0, y_0)$ y dichas aproximaciones son mejores cuanto más pequeños son los incrementos de las variables independientes Δx y Δy .

El caso de funciones vectoriales de una variable real presenta una particularidad que destacamos a continuación. El número de componentes es indiferente pero, para simplificar, consideraremos una función $\mathbf{f} : x \in D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{R}^2$. Sus componentes f_1 y f_2 son funciones reales de variable real. Si x_0 es un punto interior de D , tiene sentido considerar el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}.$$

Caso de existir, se denota por $\mathbf{f}'(x_0)$ y recibe el nombre de **derivada** de \mathbf{f} en el punto x_0 que es un vector de \mathbb{R}^2 . Es fácil probar que el límite de una función vectorial es el vector cuyas componentes son los límites de cada componente de la función. Por tanto, en nuestro caso tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Vemos, pues, que \mathbf{f} es derivable en x_0 cuando lo son sus componentes y se verifica $\mathbf{f}'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0))$. La matriz jacobiana de \mathbf{f} es la matriz columna $\mathbf{f}'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0))^t$. Entre las funciones vectoriales de una variable, el concepto de derivada de una función en un punto es de mayor interés y se usa más a menudo que el de matriz jacobiana; por ello, reservaremos la notación $\mathbf{f}'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0))$ para la derivada de \mathbf{f} en x_0 .

Una ecuación del tipo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$, puede interpretarse como la ecuación paramétrica de una curva plana. Vamos a mostrar que el vector derivada $\mathbf{r}'(t_0)$ es un vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{r}(t_0)$. En efecto, el cociente incremental

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0},$$

es un vector con igual dirección y sentido que $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$, si $t > t_0$; en cambio, si $t < t_0$, el sentido es el contrario. En cualquier caso, el cociente incremental es un vector paralelo a la cuerda de extremos $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t_0)$, y dirigido en el sentido en que $\mathbf{r}(t)$ recorre la curva. Al tomar límite cuando $t \rightarrow t_0$, se obtiene un vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{r}(t_0)$ y dirigido en el sentido mencionado.

Terminamos este apartado haciendo notar que la matriz jacobiana de una función escalar no es otra cosa que el gradiente, y si la función escalar es de una sola variable, entonces la matriz jacobiana tiene un único elemento que es la derivada ordinaria $f'(x_0)$.

2.2. Propiedades de la diferencial de campos vectoriales.

Las propiedades de la diferencial de funciones vectoriales son las mismas que las de funciones de varias variables escalares.

También podemos extender la regla de la cadena estudiada en cursos de Cálculo.

Teorema 2.1 (Regla de la cadena). Sean $\mathbf{f} : D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g} : D(\mathbf{g}) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, con $\mathbf{f}(D(\mathbf{f})) \subset D(\mathbf{g})$. Si \mathbf{f} es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in D(\mathbf{f})$ y \mathbf{g} lo es en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y se verifica $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$.

Es importante destacar que el teorema precedente afirma que la matriz jacobiana de la función compuesta es el producto de las matrices jacobianas de \mathbf{g} y \mathbf{f} .

Ejercicio 2.2.1. Sean:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f(u, v) &= (u + v, u, v^2) \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & g(x, y) &= (x^2 + 1, y^2) \end{aligned}$$

Calcular la derivada de $f \circ g$ en $(1, 1)$ usando la regla de la cadena.

En las aplicaciones nos solemos encontrar a menudo con el problema de realizar cambios de variables y tener que reescribir la relación o ecuación que verifican las variables primitivas en las nuevas variables. Supongamos que tenemos $z(y_1, y_2, \dots, y_n)$ y que cada $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Si tenemos una ecuación o relación en la que aparece $\frac{\partial z}{\partial y_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) y quisiéramos poner la ecuación en función de $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Ejercicio 2.2.2. De cierta magnitud T se conoce que verifica la siguiente relación en derivadas parciales en coordenadas polares

$$\operatorname{sen} \omega \cdot \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{\cos \omega}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial \omega} = 0. \quad (2.1)$$

Calcular la ecuación que verifica T en las coordenadas cartesianas.

2.3. Plano tangente a una superficie

El lugar geométrico de los puntos del espacio que verifican la ecuación

$$f(x, y, z) = 0$$

es, en general, una superficie S , pues se trata de un conjunto de puntos con dos grados de libertad. En efecto, pueden escogerse los valores de x e y libremente y el valor de z queda determinado por la ecuación. Ésta recibe el nombre de ecuación implícita de la superficie.

Vamos a probar que, si (x_0, y_0, z_0) es un punto de S , $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es un vector perpendicular al vector tangente, en dicho punto, a cualquier curva contenida en la superficie y que pasa por (x_0, y_0, z_0) . Sea, pues, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($t \in [a, b]$) la ecuación de una curva que está contenida en la superficie S y que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) . Entonces existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ y se verifica

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad \text{para cada } t \in [a, b].$$

Si $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, entonces $F(t) = 0$, para cada $t \in [a, b]$. Por tanto $F'(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. En particular, $F'(t_0) = 0$. Ahora bien, aplicando la regla de la cadena se tiene que $F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$. Por tanto, queda probado que $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ (el vector tangente unitario a la curva en (x_0, y_0, z_0)) son perpendiculares.

Ésta es la razón por la que se defina el plano tangente a la superficie $f(x, y, z) = 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) como el plano que pasa por dicho punto y es perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Su ecuación tiene la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (z - z_0) = 0,$$

donde las derivadas parciales de f se toman en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Si la ecuación de la superficie viene dada en forma explícita por $z = F(x, y)$, podemos pasar a la forma implícita poniendo $f(x, y, z) = F(x, y) - z = 0$. De acuerdo con lo que acabamos de ver, el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ tiene por ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + (-1) \cdot (z - F(x_0, y_0)) = 0,$$

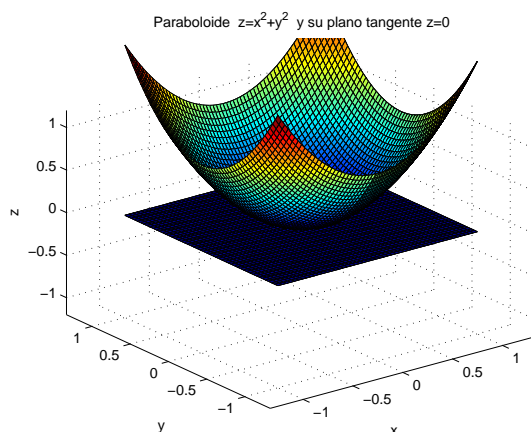
ya que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$. Por tanto, la ecuación del plano tangente adopta la forma final

$$z = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

que es la misma expresión que hemos obtenido al estudiar el concepto de función diferenciable de dos variables.

Ejemplo 2.3.1. Calcular el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(0, 0, 0)$.

Solución: Haciendo cálculos resulta $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0$. Como $z(0, 0) = 0$, la ecuación del plano tangente es $z = 0$.



Finalizamos el apartado destacando una propiedad de ∇f en relación con las superficies de nivel de f . Dada una función f de tres variables $f(x, y, z) = c$ es la solución de una superficie de nivel. Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de dicha superficie, del mismo modo que hemos probado que ∇f es perpendicular a la superficie $f(x, y, z) = 0$, puede demostrarse que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel.

2.4. El jacobiano

En este apartado consideramos funciones vectoriales con n variables y n componentes. En tal caso, la matriz jacobiana es una matriz cuadrada de orden n y tiene sentido calcular su determinante que recibe el nombre de **jacobiano** de la función en el punto en cuestión.

Definición 2.3. Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, una función diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in D$. Se define el **jacobiano** de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 como el determinante de la matriz jacobiana $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ y se denota por

$$\det(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Si $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ también suele usarse la notación

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0).$$

Ejemplo 2.4.1. Si $x = r \cos \alpha$ e $y = r \sin \alpha$, entonces

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \alpha)} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r.$$

Las dos propiedades fundamentales del jacobiano son las siguientes:

- (1) Si \mathbf{f} es diferenciable en \mathbf{x}_0 y \mathbf{g} es diferenciable en $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$, entonces el jacobiano de la función compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es el producto de los jacobianos, es decir, se verifica

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

donde $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ e $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

- (2) Si \mathbf{f} posee inversa diferenciable, entonces se verifica

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1,$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Ambas propiedades se deducen fácilmente a partir de la regla de la cadena y del hecho bien conocido de que el determinante de un producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes de ambas. La segunda es consecuencia directa de la primera.

Ejemplo 2.4.2. Sean $u = \frac{y}{x}$ y $v = x^2 + y^2$, calcular $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Solución: Lo más cómodo es calcular el jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ y después invertir el resultado obtenido:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -\frac{2y^2}{x^2} - 2 = -2(u^2 + 1).$$

Entonces el jacobiano que buscamos es igual a $\frac{-1}{2(u^2 + 1)}$, por la propiedad segunda.

Un cálculo sencillo permite obtener las variables x e y en función de u y v . Concretamente

$$x = \sqrt{\frac{v}{1+u^2}}, \quad y = u\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}$$

Con estas expresiones de x e y , ahora podríamos obtener el jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ directamente, pero es más simple el camino anterior, calculando el jacobiano de la función inversa y aplicar posteriormente la segunda propiedad.

2.5. Derivación de funciones definidas implícitamente.

2.5.1. Caso de una ecuación con dos variables

Una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$ se puede interpretar como la ecuación en forma implícita de una curva en el plano OXY , ya que el conjunto de los puntos que verifican la ecuación poseen un grado de libertad (se pueden escoger los valores de x libremente y los de y quedan determinados por la ecuación). Este tipo de ecuaciones pueden dar lugar a diferentes situaciones, como se puede observar en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.5.1.

- (a) $F(x, y) = x^2 + e^y = 0$. En este caso la ecuación no tiene ninguna solución.
- (b) $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ tiene un único punto solución, el origen.
- (c) $F(x, y) = e^y - x^2 - 1 = 0$. Despejando y se obtiene $y = \ln(x^2 + 1)$.
- (d) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Al despejar y obtenemos dos soluciones: $y = +\sqrt{1-x^2}$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$.
- (e) $F(x, y) = x^4 + y^4 + xy - 3 = 0$. Se observa que $(1, 1)$ verifica la ecuación, pero podemos despejar ninguna incógnita en función de la otra.

Teorema 2.2 (De la Función Implícita). *Sea F una función de clase uno en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in D$ un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno E de x_0 de modo que sólo hay una función $y = y(x)$ definida implícitamente en dicho entorno por la ecuación y verificando $y(x_0) = y_0$. Además, esta función tiene derivada continua en cada punto de E .*

Supongamos que $y = y(x)$ es una función definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$ y queremos calcular $y'(x)$. Vamos a ver que podemos encontrar $y'(x)$ aunque no dispongamos de la forma explícita de $y(x)$. Basta observar que $F(x, y(x)) = 0$, para cada $x \in E$ (E es el dominio de $y(x)$). Entonces la derivada de $F(x, y(x))$ respecto de x es cero en E . Para obtener esta derivada no hay más que aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

para cada $x \in E$. Esta ecuación permite obtener

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

expresión válida para cada $x \in E$ siempre que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$.

Nota: Nótese que este teorema es un teorema estrictamente *local* para las soluciones de $F(x, y) = 0$ en un entorno de una solución inicial (x_0, y_0) . No indica cómo hallar esa solución inicial ni *cómo* se determina una expresión explícita para $y = f(x)$.

Ejercicio 2.5.1. *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto (x_0, y_0) , siendo $y_0 > 0$. Calcular el valor de $y'(0)$.*

2.5.2. Caso de una ecuación con tres variables

La ecuación $F(x, y, z) = 0$ define una superficie de forma implícita. Para saber si la ecuación define a z como función implícita de las variables x e y , en un entorno de un punto (x_0, y_0, z_0) que verifica la ecuación, acudiremos a un teorema similar al que acabamos de ver.

Teorema 2.3. *Sean F una función de clase uno en un abierto $\subset \mathbb{R}^3$ y $(x_0, y_0, z_0) \in D$ un punto tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno E de (x_0, y_0) de modo que sólo hay una función $z = z(x, y)$ definida implícitamente en dicho entorno por la ecuación y verificando $z(x_0, y_0) = z_0$. Además, esta función tiene derivadas parciales de primer orden continuas en cada punto de E .*

De hecho, existe un Teorema general de la Función Implícita, válido para una ecuación $F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$. En este caso, si se quiera que la ecuación defina implícitamente a la variable x_{n+1} como función de las restantes en un entorno del punto \mathbf{x}_0 , el Teorema exige que $F'_{x_{n+1}}$ no se anule en dicho punto.

Ejemplo 2.5.2. La ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(2, 0, 0)$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

$\frac{\partial F}{\partial z} = x + 2z - e^z \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(2,0,0)} = 1 \neq 0$. Luego F define a z como función implícita de x e y ($z = f(x, y)$) en un entorno de dicho punto.

$$y^2 + xf(x, y) + f(x, y)^2 - e^{f(x, y)} - 4 = 0$$

Derivando respecto de x

$$f(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x} + 2f(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} - e^{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} (x + 2f(x, y) - e^{f(x, y)}) = -f(x, y)$$

$$\text{Luego } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f}{x + 2f - e^f}.$$

$$\text{Análogamente } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x + 2f - e^f}.$$

2.5.3. Caso de un sistema de ecuaciones

En primer lugar, vamos a estudiar el caso de un sistema de dos ecuaciones y tres variables. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

y nos planteamos la cuestión siguiente: ¿qué condiciones deben verificar F y G para que el sistema defina implícitamente a x e y como funciones de z . Antes de dar la respuesta a esta pregunta, es conveniente considerar el caso de un sistema lineal

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es conocido del Álgebra Lineal que, si el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces en el sistema (2.3) x e y están determinadas (de manera única) en función de z por las

relaciones siguientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 z & b_1 \\ -c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z \\ a_2 & -c_2 z \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Nótese que Δ no es otra cosa que $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$, es decir, el jacobiano de (F, G) respecto de las variables x e y . Por tanto, en el caso lineal, si se verifica la condición $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \neq 0$, entonces el sistema define a x e y como funciones de z . Pues bien, en el caso general ocurre exactamente lo mismo, sólo que expresan x e y en función de z . Concretamente, se verifica el siguiente resultado.

Teorema 2.4 (Teorema de la función implícita para sistemas). *Sean F y G funciones de clase uno en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$ y $(x_0, y_0, z_0) \in D$ un punto tal que se verifica el sistema (2.2) y $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno E de z_0 de modo que el sistema (2.2) define implícitamente (de manera única) en dicho entorno a x e y como funciones de z ($x = x(z)$, e $y = y(z)$), verificando $x(z_0) = x_0$ e $y(z_0) = y_0$. Además, estas funciones tienen derivadas de primer orden continuas en cada punto de E .*

Ejemplo 2.5.3. Las dos ecuaciones $\left. \begin{array}{l} 2x=v^2-u^2 \\ y=u \cdot v \end{array} \right\}$ definen a u y v como funciones de x e y . Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución:

Derivando las expresiones anteriores respecto de x , se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} 2 = -2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2v \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{2u}{-2u^2 - 2v^2} = -\frac{u}{u^2 + v^2}.$$

$$\text{Análogamente: } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -2u & 2 \\ v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix}} = \frac{-2v}{-2u^2 - 2v^2} = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Hacemos lo mismo para la variable y , se tiene: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2 + v^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2 + v^2}$.

Ejemplo 2.5.4. Si u se elimina entre las dos ecuaciones $x = u + v$, $y = u \cdot v^2$, llegamos a una ecuación de la forma $F(x, y, v) = 0$ que define a v como función implícita de x e y . Hallar $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución:

$$u = x - v \Rightarrow y = (x - v)v^2 \Rightarrow y = xv^2 - v^3 \Rightarrow F(x, y, v) = 0 \Leftrightarrow y + v^3 - xv^2 = 0.$$

Derivando respecto de x se obtiene:

$$3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} - v^2 - 2xv \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} v(3v - 2x) = v^2 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{3v - 2x}.$$

Análogamente, derivando respecto de y se obtiene:

$$1 + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial y} - 2xv \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow 1 = (2xv - 3v^2) \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2xv - 3v^2}.$$

Para finalizar, enunciamos el teorema de la Función Implícita para un número cualquiera de variables (tanto independientes como dependientes).

Teorema 2.5 (Teorema de la Función Implícita). *Consideremos las m ecuaciones :*

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0 \\ &\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tales que $\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)} \neq 0$ en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ siendo $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, z_1^0, \dots, z_m^0)$.

Entonces, las m ecuaciones anteriores definen a las variables z_1, z_2, \dots, z_m como funciones de las variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n , es decir, $z_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$ en un entorno E de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Además estas funciones tienen derivadas parciales continuas en E .

2.6. Ejercicios Propuestos.

2.1 Estudiar la continuidad de la siguiente función: $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ donde:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{x^5 + 6y^5}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2.2 Sean las funciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por:

$$f(x, y, z) = (\sin(xy + z), (1 + x^2)^{yz}) \quad \text{y} \quad g(u, v) = (u + e^v, v + e^u).$$

- (a) Demuéstrese que f es diferenciable en $(1, -1, 1)$ y calcúlese $Df(1, -1, 1)$.
- (b) Demuéstrese que g es diferenciable en $(0, \frac{1}{2})$ y calcúlese $Dg(0, \frac{1}{2})$.
- (c) Calcúlese $D(g \circ f)(1, -1, 1)$.

2.3 Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, siendo $f(x, y) = (e^{x+y}, x - y, x^2)$ y $g(u, v, w) = (u^w, \sin(v + w))$

Pruébese que f es diferenciable en $(0, 0)$, que g es diferenciable en $f(0, 0)$ y que $h = g \circ f$ es diferenciable en $(0, 0)$. Calcúlese $Dh(0, 0)$.

2.4 Demostrar que la función $z = f(x - at) + g(x + at)$ siendo f y g derivables dos veces, satisface la ecuación de vibraciones de la cuerda $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2.5 Si se realiza el cambio de variables dado por $u = x^2 + y^2$ y $v = xy$, encontrar la forma que adopta en las nuevas variables la ecuación $y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

2.6 Se considera la ecuación $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Encontrar la forma que adopta la ecuación en las nuevas variables u y v , dadas por $x = u + v$, $y = u - v$.

2.7 Comprobar que el plano tangente en cada punto de la superficie $x^2 + y^2 = a^2$ tiene en común una recta con ella.

2.8 Si $y = y(x)$ es una función definida implícitamente por $x^2 + y^3 + e^y = 0$, calcular y' e y'' en términos de x e y .

2.9 La ecuación $x + z + (y + z)^2 = 6$ define a z como función implícita de x e y , sea $z = f(x, y)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2.10 Comprobar que la ecuación $x^4 + y^4 + xy - 3 = 0$ define implícitamente a y como función de x en un entorno de $(1, 1)$. Si $y(x)$ denota dicha función, calcular $y''(1)$.

2.11 La ecuación $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y + z + 4 = 0$ define a z como función implícita de x e y . Calcular el valor de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en el punto $(1, 0, -1)$.

2.12 Calcular la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, en el punto $(1, 2\sqrt{3})$.

2.13 Comprobar que el sistema siguiente define a x e y como funciones de z en un entorno de $(1, 1, 1)$. Calcular $x'(1)$ e $y'(1)$.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2x - 1 = 0, \\ G(x, y, z) = xyz - 1 = 0. \end{cases}$$

2.14 Probar que el sistema $\begin{cases} x + y + t = 1, \\ x^3 + y^3 + t^3 = 1, \end{cases}$ define implícitamente a x e y como funciones de t en un entorno de $(1, 0, 0)$. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan dichas funciones, obtener el vector tangente de la curva de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ en el punto $t = 0$.

2.15 El sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 + u = 0, \\ xz + yu + 1 = 0, \end{cases}$ define a z y u como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x, y, z, u) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.