ANEXO (A)

CÁLCULO II

(Fórmulas y Notas Complementarias)

1. Algunas nociones sobre topología

Definición de distancia. Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R^n}$. La aplicación

$$d : \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$$

definida de la siguiente forma

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

se denomina distancia euclídea y verifica las siguientes propiedades:

1) $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$.
2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$.
3) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{x}) \;\; \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{R^n}$ (*desigualdad triangular*).

Definición de bola abierta. Sean $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$ y $r > 0$. Se denomina bola abierta de centro $\bar{a}$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbf{R^n} /\ d(\bar{x}, \bar{a}) < r\}.$$

En el caso de $n = 2$ se trata de un círculo de centro a y radio r y en el de $n = 3$ se trata de una esfera de centro a y radio r.

Definición de bola cerrada. Sean $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$ y $r > 0$. Se denomina bola cerrada de centro $\bar{a}$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbf{R^n} /\ d(\bar{x}, \bar{a}) \leq r\}.$$

Definición de entorno. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Un subconjunto $E \subset \mathbf{R^2}$ es un entorno de $\bar{a}$, si existe una bola abierta de centro $\bar{a}$ contenida en E.

Definición de entorno reducido. Sea E un entorno del punto $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se denomina entorno reducido de $\bar{a}$ al conjunto $E - \{\bar{a}\}$.

Ejemplo. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \ / \ 0 < x^2 + y^2 < 1\} = B(\bar{0}, 1) - \{\bar{0}\}$.

Complementario de un conjunto. Dado un conjunto U y un subconjunto $A \subset U$, se denomina complementario de A en U al conjunto, que denotaremos por A^C, contenido en U tal que $A \cup A^C = U$ y $A \cap A^C = \emptyset$.

Clasificación de los puntos de un conjunto:

Definición de punto interior. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se dice que $\bar{a}$ es un punto interior de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, si existe un $r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$.

Se denomina *interior* de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$ al conjunto, que denotamos $\mathring{A}$, formado por todos los puntos interiores de A.

Definición de punto exterior. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se dice que $\bar{a}$ es un punto exterior de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, si es interior del complementario de A $\left(A^C\right)$, es decir, $\exists\ B(\bar{a}, r) \subset A^C$ y tal que $B(\bar{a}, r) \cap A = \emptyset$.

Se denomina *exterior de un conjunto* A al conjunto, que denotamos $Ext\ A$, formado por todos los puntos exteriores de A.

Definición de punto frontera. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se dice que $\bar{a}$ es un punto frontera de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$ si, $\forall\ r > 0$, $B(\bar{a}, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(\bar{a}, r) \cap A^C \neq \emptyset$.

Se llama *conjunto* $frontera$ *de* A a todos los puntos frontera de A y se denotará $F_r A$.

Estos puntos no son ni interiores ni exteriores (los rodean puntos de A y de A^C).

Definición de punto de adherencia. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se dice que $\bar{a}$ es un punto de adherencia de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$ si, $\forall\ r > 0$, se tiene que $B(\bar{a}, r) \cap A \neq \emptyset$.

Al conjunto de todos los puntos de adherencia del conjunto A se le denomina *adherencia del conjunto* A y se denotará $\overline{A}$.

Los puntos interiores y los puntos de frontera son puntos de adherencia.

Definición de punto de acumulación. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se dice que $\bar{a}$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$ si, $\forall\ r > 0$, se tiene que $(B(\bar{a}, r) - \{\bar{a}\}) \cap A \neq \emptyset$.

Al conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto A se le denomina *derivado del conjunto* A y se denota A'.

Definición de punto aislado. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$. Se dice que $\bar{a}$ es un punto aislado de un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$ si $\exists\ r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \cap A = \emptyset$.

Definición de conjunto abierto. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, se dice que es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores.

Definición de conjunto cerrado. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, se dice que es un conjunto cerrado si su complementario es abierto.

Definición de conjunto denso. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, si $\overline{A} = \mathbf{R^n}$, se dice que es un conjunto denso en $\mathbf{R^n}$.

Definición de conjunto acotado. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, si existe una bola de centro $\bar{a}$ y radio r tal que $A \subset B(\bar{a}, r)$, se dice que es un conjunto acotado en $\mathbf{R^n}$.

Definición de conjunto conexo. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, se dice que es un conjunto conexo, si no es posible encontrar dos conjuntos abiertos B y C, distintos del vacío, tales que $A \subset B \cup C$, con $C \cap \overline{B} = \emptyset$ y $\overline{C} \cap B = \emptyset$

Definición de dominio. Un conjunto $A \subset \mathbf{R^n}$, se dice que es un dominio si es abierto y conexo.

NOTA: Para mayor información véase, de la bibliografía, [**11**, García]

2. Notas sobre geometría

2.1 Vectores en el espacio $\mathbf{R}^n$(n=2, n=3):

Vector en R^3.
$\mathbf{v} = \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$
norma (módulo) del vector $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Base canónica de R^3.

$$\overrightarrow{i} = (1,0,0); \ \overrightarrow{j} = (0,1,0) \ \overrightarrow{k} = (0,0,1).$$

Todo vector se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base.

$$\overrightarrow{i} = (1,0,0); \ \overrightarrow{j} = (0,1,0); \ \overrightarrow{k} = (0,0,1)$$

esto es,

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_1 \overrightarrow{k}.$$

Vector unitario.

$$\textit{vector de modulo uno} = \left(\frac{v_1}{\|\overrightarrow{v}\|}, \frac{v_2}{\|\overrightarrow{v}\|}, \frac{v_3}{\|\overrightarrow{v}\|} \right).$$

Suma de vectores.

$$(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3).$$

Producto de un vector por un escalar.

$$c(v_1, v_2, v_3) = (cv_1, cv_2, cv_3).$$

Producto escalar canónico. Dados dos vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ se define producto escalar canónico de dichos vectores al escalar dado por:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Propiedades del producto escalar:

1. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|^2 > 0$.

2. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \cos\theta$, $\quad \theta =$ ángulo que forman los dos vectores.

3. Vectores ortogonales (perpendiculares): Dos vectores (no nulos) son ortogonales si su producto escalar vale cero, esto es:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \cos\theta = 0; \quad \theta = \pi/2.$$

4. Cosenos directores de un vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

- $\cos\alpha = \dfrac{v_1}{\|\overrightarrow{v}\|}$, $\quad \alpha =$ ángulo que forma el vector $\overrightarrow{v}$ y el vector $\overrightarrow{j} = (1, 0, 0)$,

- $\cos\beta = \dfrac{v_2}{\|\overrightarrow{v}\|}$, $\quad \beta =$ ángulo que forma el vector $\overrightarrow{v}$ y el vector $\overrightarrow{k} = (0, 1, 0)$,

- $\cos\gamma = \dfrac{v_3}{\|\overrightarrow{v}\|}$, $\quad \gamma =$ ángulo que forma el vector $\overrightarrow{v}$ y el vector $\overrightarrow{i} = (0, 0, 1)$.

Producto vectorial de dos vectores. Dados dos vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ se define producto vectorial del vector $\overrightarrow{v}$ por el vector $\overrightarrow{w}$ al vector dado por:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedades del producto vectorial:

1. $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$.

2. $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} = 0$.

3. $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 \overrightarrow{w}\|^2 - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})^2$.

4. $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \sin\theta$, $\quad \theta =$ ángulo que forman los dos vectores.

5. Dos vectores (no nulos) son paralelos si su producto escalar vale cero

2.2 Geometría en el espacio $\mathbf{R}^2$:

Distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ **y** $P_2(x_2, y_2)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de una recta: distintas formas de expresarla.

$$continua: \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$punto - pendiente: \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = mx + b.$$

$$general: \quad Ax + By + C = 0$$

Distancia de un punto (x_0, y_0) **a la recta** $Ax + By + C = 0$**.**

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Ángulo α **entre dos rectas de pendientes** m_1 **y** m_2**.**

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Área de un triángulo de vértices los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ **y** (x_3, y_3).

$$\text{Área} = valor\ absoluto\ de\ \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.3 Geometría en el espacio $\mathbf{R}^3$:

Distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$d(P_1, P_2) = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Vector de origen el punto (x_1, y_1, z_1) **y de extremo el punto** (x_2, y_2, z_2).

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Ecuación vectorial de una recta. Recta que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene por vector de dirección a $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{array} .$$

Ecuación continua de la recta. Recta que pasa por dos puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Ecuaciones de un plano:

Ecuación de un plano que **pasa por el punto** $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene de vectores directores a $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 + \mu w_1 \\ z = z_1 + \lambda v_3 + \mu w_1 \end{array} .$$

Ecución de un plano que **contiene al punto** $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **y su vector de dirección (vector perpendicular al plano) está dado por** $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$(x - x_0)v_1 + (y - y_0)v_2 + (z - z_0)v_3 = 0$$

La ecución general de un plano está dada por

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \ (A, B, C) \text{ vector normal al plano}$$

Ecución de un plano que pasa por tres puntos.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ecución de la recta que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Distancia de un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d(P_0, \Pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Distancia de un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a una recta

$$r \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3. \end{cases}$$

$$d(P_0, r) = \frac{\| \overrightarrow{P_0 Q} \times \overrightarrow{v} \|}{\| \overrightarrow{v} \|},$$

donde Q es un punto cualquiera de la recta r.

Ecuación de un plano referido a la intersección con los ejes.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Traza de un plano. Es cada una de las intersecciones de dicho plano con los ejes de coordenadas.

Ecuación de un plano paralelo al eje XY: $z = K$.

Ecuación de un plano paralelo al eje XZ: $y = K$.

Ecuación de un plano paralelo al eje YZ: $x = K$.

Haz de planos. El haz de planos definido por los planos $\Pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\Pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ viene dada por la ecuación

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0,\ \ \lambda,\mu \in \mathbf{R}$$

Ángulo que forman dos planos. Es el ángulo formado por los vectores directores (normales) de dichos planos.

Coordenadas polares.

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \quad o \quad \left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = arctan(y/x) \end{array}\right.$$

Coordenadas cilíndricas. $P(r,\theta,z)$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \\ z=z \end{array}\right.$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Coordenadas esféricas. $P(r,\theta,\Phi)$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta\sin\Phi \\ y = r\sin\theta\sin\Phi \\ z=r\cos\Phi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \\ \Phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}\right.$$

$$0 \le \theta \le 2\pi;\ \ 0 \le \Phi \le \pi$$

CRITERIOS PARA EL CÁLCULO DE EXTREMOS LIBRES:

Para dos variables:

Dada $z = f(x, y)$, si $f'_x(x_0, y_0) = 0$ y $f'_y(x_0, y_0) = 0$, calculado el valor del hessiano en dicho punto

$$H[f(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

caso de ocurrir que:

•$H[f(x_0, y_0)] > 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces la función $f(x, y)$ presenta un mínimo relativo en el punto (x_0, y_0).

•$H[f(x_0, y_0)] > 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces la función $f(x, y)$ presenta un máximo relativo en el punto (x_0, y_0).

•$H[f(x_0, y_0)] < 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces la función $f(x, y)$ presenta un punto de ensilladura en (x_0, y_0).

• $H[f(x_0, y_0)] = 0$, o no existe alguna derivada parcial, el criterio no da información.

Para tres variables:

Sea $w = f(x, y, z)$, si

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \ \text{ y } \ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

dada la matriz Hessiana

$$H_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

se estudia el signo en el punto (x_0, y_0, z_0) de los siguientes determinantes:

$$\mathbf{\Delta}_1 = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0),\ \mathbf{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ y } \mathbf{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

si:

•$\mathbf{\Delta}_i > 0$, para todo $i = 1, 2, 3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) la función tiene un mínimo local.

•$\mathbf{\Delta}_1 < 0$, $\mathbf{\Delta}_2 > 0$ y $\mathbf{\Delta}_3 < 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) la función tiene un máximo local.

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL TIPO DE EXTREMO SI SE EMPLEA EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

Para una función de dos variables $f(x,y)$ y una ligadura $g(x,y)$:

Dado el Hessiano orlado

$$H_F = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Si:

- $H_F(x_0, y_0) > 0$, entonces la función f tiene un máximo condicionado en (x_0, y_0).
- $H_F(x_0, y_0) < 0$, entonces la función f tiene un mínimo condicionado en (x_0, y_0).
- $H_F(x_0, y_0) = 0$, no podemos determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0).

Para una función de tres variables $f(x,y,z)$ y una ligadura $g(x,y,z)$:

Dado el Hessiano orlado

$$H_F = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

y

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Si:

- $H_F(x_0, y_0, z_0) < 0$ y $\mathbf{\Delta} > 0$, entonces la función f tiene un máximo condicionado en (x_0, y_0, z_0).
- $H_F(x_0, y_0, z_0) < 0$ y $\mathbf{\Delta} < 0$ entonces la función f tiene un mínimo condicionado en (x_0, y_0, z_0).
- $H_F(x_0, y_0, z_0) > 0$, entonces la función f no tiene extremos condicionados en el punto (x_0, y_0, z_0).
- $H_F(x_0, y_0, z_0) = 0$, no podemos determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0, z_0).