

Tarea #2

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Profesor: Marcelo Leseigneur P.

Fecha:

09 de Enero de 2007

Auxiliar: Renzo Lüttges Cintolesi

Fecha Entrega:

18 de Enero de 2007

Problema 1:

a) Hallar los vectores velocidad, aceleración y la ecuación de la recta tangente a la curva cuya parametrización en el tiempo es: $\sigma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{3}t)$, en particular para $t = 0$. Si una partícula cuya masa es de 2 gramos, indique la fuerza que actúa sobre ella en $t = 0$.

b) Suponga que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (t, e^t, t \cos t)$ debido a cierto campo de fuerzas desconocido. En el tiempo $t = \pi$ dicho campo deja de actuar, y la partícula continúa su movimiento en línea recta. ¿Dónde se encuentra la partícula al tiempo $t = 2\pi$? Indique el largo de la trayectoria seguida por la partícula desde el inicio hasta $t = 2\pi$. (Indicación: $\text{Largo}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$)

Problema 2:

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

- a) La curvatura de una trayectoria es su tendencia a no permanecer en un mismo plano
- b) Para dos parametrizaciones distintas de una misma curva, se podría obtener un largo distinto de ésta.
- c) Si γ es una curva regular, entonces $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ para todo t con cualquier parametrización.
- d) El círculo “osculador” a una curva es único en cada punto.

Problema 3:

a) Demostrar que el campo $F(x, y, z) = (3x^2y, x^3 + y^3, 0)$ es conservativo. (Es decir que existe f de clase C^2 tal que $F = \nabla f$).

b) Sea $\sigma(t) = (\frac{1}{(1-t)}, e^t, \frac{e^t}{(1-t)})$. Encuentre un campo $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que σ sea una línea de flujo de éste.

Problema 4:

Calcule los vectores Tangente unitario, Normal unitario y Binormal unitario para la hélice en \mathbb{R}^3 .

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Muestre que $\hat{B}(t) \neq 0 \forall t$. Explique a qué se debe esto. Dibuje la hélice en $t \in [0, 2\pi]$, junto a los vectores $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ evaluados en $t = \pi$.

Problema 5:

Sea $\vec{\sigma}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{\sigma}(t) = (\cosh(t), t^2, e^{-t^2})$. Definimos la curvatura κ y la torsión τ de la curva como:

$$\kappa = \frac{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt} \right\|}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}, \quad \tau = \frac{-\hat{N} \cdot \frac{d\hat{B}}{dt}}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \quad \text{Donde } \hat{T}(t), \hat{N}(t), \hat{B}(t) \text{ son los vectores Tangente, Normal y Binormal a la curva respectivamente.}$$

Se pide:

- Calcular los vectores tangente, normal y binormal a la curva.
- Calcular la curvatura κ y la torsión τ de la curva.
- Calcular la parametrización de la evoluta de Γ , definida como:

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \frac{\hat{N}(t)}{\kappa(t)} \quad \text{donde } \hat{N}(t) \text{ es el vector normal unitario.}$$

- Bosquejar un gráfico de $\vec{\sigma}$ y de su evoluta.

Problema 6:

a) Considere $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = x^T A x + b^T x + c$. Con $A \in M_{n \times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$, y $c \in \mathbb{R}$ un escalar. Muestre qué condiciones deben cumplir estos parámetros para que G sea convexa.

b) Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que su aproximación de segundo orden es convexa. ¿Es F convexa? ¿Ocurre lo mismo si F no es clase C^2 ? ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Problema 7:

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que en cierto punto x_0 existen todas sus derivadas parciales. Pruebe que entonces f es diferenciable en x_0 .

Problema 8:

Muestre que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces:

- El plano tangente de f se encuentra siempre por debajo de ésta:

$$f(x) \geq f(x_0) + [\nabla f(x_0)]^T (x - x_0).$$
- $$[\nabla f(x) - \nabla f(x_0)]^T (x - x_0) \geq 0.$$

Problema 9:

a) Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones convexas con f creciente. Pruebe que la composición $f \circ g$ es convexa.

b) Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Considere $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$. Pruebe que f es convexa si y sólo si g es convexa.

Indicación: Pruebe que
$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x_0} \cdot \frac{f(1/x) - f(1/x_0)}{1/x - 1/x_0}.$$

Problema 10:

Resuelva los siguientes problemas de optimización (condiciones de primer y segundo orden):

a) $\max \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \quad \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$

b) $\max \quad -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \wedge \quad x_i > 0 \quad \forall i \quad .$

c) $\max \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) \sin\left(\frac{z}{2}\right) \quad \text{s.a.} \quad x + y + z = \pi \quad .$

d) $\min \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{s.a.} \quad \prod_{i=1}^n x_i = 1 \quad \wedge \quad x_i > 0 \quad \forall i \quad .$

e) Use resultado de (d) para probar que si $a_1, \dots, a_n > 0$ entonces: $\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad .$

Problema 11:

Sea

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdot & \cdot & z_1 \\ x_2 & y_2 & \cdot & \cdot & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \cdot & \cdot & z_n \end{bmatrix} \quad \text{una matriz de } n \times n \text{ con } n^2 \text{ incógnitas. Nos interesa encontrar los valores máximos y mínimos de } \det(A) \text{ (determinante de } A) \text{ sujeto a las condiciones:}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + \dots + z_1^2 &= h_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + \dots + z_2^2 &= h_2^2 \\ &\vdots \\ x_n^2 + y_n^2 + \dots + z_n^2 &= h_n^2 \end{aligned} \quad \text{con } h_1, h_2, \dots, h_n > 0 \quad .$$

Para ello se pide:

a) Pruebe que $\det(A)$ puede escribirse como $\det(A) = x_i \bar{X}_i + y_i \bar{Y}_i + \dots + z_i \bar{Z}_i$. Donde $\bar{X}_i, \dots, \bar{Z}_i$ corresponden al determinante de una matriz de $(n-1) \times (n-1)$ con el signo adecuado. Muestre además que si $i \neq j$, entonces $x_j \bar{X}_i + y_j \bar{Y}_i + \dots + z_j \bar{Z}_i = 0$.

b) Plantee el problema como un problema de Optimización.

c) Resuelva lo planteado en (b).

d) Deduzca que:

$$|\det(A)| = \sqrt{\prod_{i=1}^n h_i^2} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + \dots + z_i^2)} \quad .$$

Problema 12:

a) Calcular los extremos de $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ sobre la curva de ecuaciones:

$$g_1(x, y, z) = z = 0$$

$$g_2(x, y, z) = z^2 - (y-1)^2 = 0$$

b) Probar que no existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que las soluciones de (a) sean puntos críticos de $\phi = f + \lambda g_1 + \mu g_2$. ¿Contradice esto el teorema de los multiplicadores de Lagrange?

Problema 13:

Calcular el mínimo relativo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restringida a:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y - 3z = 4 \end{cases}$$

Dar una interpretación geométrica del resultado.

Problema 14:

Considere una célula esférica de radio igual a 6 unidades y centrada en el origen. Suponga que la concentración de cierta proteína en su interior está dada por la función $C(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$. Encuentre el punto de la membrana externa de la célula con la menor concentración de dicha proteína.

Problema 15:

Encontrar el mínimo de la función $f(x, y) = 2y$ en el conjunto $3x^2 - 5y^5 = 0$. ¿por qué no funciona el método de los multiplicadores de Lagrange?

Problema 16:

Considere el problema

$$\min f(x, y) = (x-2)^2 + 2x + y^2 - y + 3 \quad \text{y el punto } \vec{x}_0 = (1, 1)$$

a) Muestre que f es convexa.

b) Resuelva utilizando el método del gradiente partiendo desde \vec{x}_0 para encontrar un punto estacionario de f . ¿es un máximo, un mínimo u otra cosa? ¿por qué?

c) Ahora utilice el método de Newton partiendo de \vec{x}_0 . ¿Fue rápida o lenta la convergencia? ¿Tiene este hecho alguna relación con que f sea convexa?

Problema 17:

Sea u una función de x e y definida implícitamente como: $u = F\left(x + uy, \frac{xy}{u^2}\right)$.

Encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ en función de las derivadas de F .

Problema 18:

Sean $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ dos funciones implícitamente definidas por el sistema:

$$\int_{ux}^{y^2} f_1(t) dt = \int_y^x g_1(t) dt \quad , \quad \int_{v^3}^{x^4} f_2(t) dt = \int_y^{u^2} g_2(t) dt \quad .$$

i) Demostrar que el punto $P = (1, 1, 1, 1)$ satisface el sistema.

ii) Dados $f_1(1) = g_1(1) = f_2(1) = g_2(1) = 1$ encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ en el punto P.

Problema 19:

Hallar las siguientes integrales dobles utilizando integración iterada.

a) $\iint_R (x \operatorname{sen} y - y e^x) dx dy$ con $R = [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) $\iint_R \sqrt{|y-x|} dx dy$ con $R = [0, 1] \times [0, 2]$

c) $\iint_D (xy)^2 dx dy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, xy < 1, (x-y)(x-2y) < 0\}$

Problema 20:

Calcular las siguientes integrales dobles utilizando el cambio a coordenadas polares:

a) $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$ donde $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, x, y \geq 0\}$

b) $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ donde $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}\}$

c) $\iint_D (x+y) dx dy$ donde D es la región acotada limitada por la curva $x^2 + y^2 = x + y$

Problema 21:

Hallar las áreas de las siguientes regiones planas:

a) $\rho \leq 2a, \rho \leq 4a \cos \theta$, con $a > 0$.

b) $\rho \geq 2, \rho \leq 2(1 + \cos \theta)$ e interior al primer cuadrante.

c) $(x^2 + y^2)^2 \leq \sqrt{xy}$, e interior al primer cuadrante.

Problema 22:

Hallar el volumen del recinto interior al cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 1$, y limitado por el plano $z = 1$ y por el paraboloide $x^2 + y^2 = z$.