

Pauta Control #2

MA22A – Cálculo en Varias Variables – Semestre Verano 2006

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Renzo Lüttges Cintoletti

Fecha: 04 de Enero de 2007

Pregunta 1:

a) Se pide resolver la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Para ello se recurre a la transformación a coordenadas polares dada por: $\begin{matrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{matrix}$.

Planteando adecuadamente el problema, se pide pasar la ecuación diferencial parcial a coordenadas polares y resolverla. *A partir de lo anterior* entregue una solución particular que no sea un polinomio ni la función nula.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \cos \theta \rho \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad . \text{ Reemplazando en la ecuación obtenemos:} \\ x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= \rho \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) + \rho \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \cos \theta \rho \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \\ &= \rho \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = f(\theta) \quad . \text{ Por ejemplo: } z = \tan(\theta) \quad . \end{aligned}$$

b) Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones clase C^2 en sus respectivos dominios.

Considere la función $w = f(x, y, z)$ con $z = g(x, y)$.

Aplicando la regla de la cadena y derivando tenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad .$$

Ahora bien, como $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, obtenemos que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{lo cual implica que} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad . \text{ Comente este resultado.}$$

Solución:

El error está en la última línea, donde se cancelan las derivadas parciales con respecto a la primera componente de la función w , ya que denotan la derivada de funciones distintas. Para evitar confusiones la función denotada como w a la derecha de la igualdad podría ser denotada por f .

Para ilustrar, un ejemplo: Supongamos $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y) = -x$. En tal caso $w = f(x, y, g(x, y)) = y$.

Luego $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ y sin embargo $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, luego no se pueden cancelar.

c) Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y no nulo. Sea además $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Se define

$$F(x, y) = f\left(\frac{x^2 - a^2}{y} + y\right).$$

Encuentre las funciones f tales que $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $\nabla^2 F(x, y) = 0$.

Solución:

Sea $g(x, y) = \frac{x^2 - a^2}{y} + y$ con lo cual:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 - \frac{x^2 - a^2}{y^2} = 2 - \frac{g}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 \frac{(g - y)}{y^2}. \text{ Por otro lado:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(g) \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(g) \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + f'(g) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(g) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + f'(g) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}. \text{ Luego:}$$

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(g) \left(\frac{4x^2}{y^2} + \frac{(2y - g)^2}{y^2} \right) + f'(g) \left(\frac{2y}{y^2} + \frac{2(g - y)}{y^2} \right) = 0$$

Donde acomodando los términos:

$$\left(\frac{4x^2}{y^2} + \frac{(2y - g)^2}{y^2} \right) = \frac{(g^2 - 4a^2)}{y^2} \quad y \quad \left(\frac{2y}{y^2} + \frac{2(g - y)}{y^2} \right) = \frac{2g}{y^2}. \text{ Con lo cual:}$$

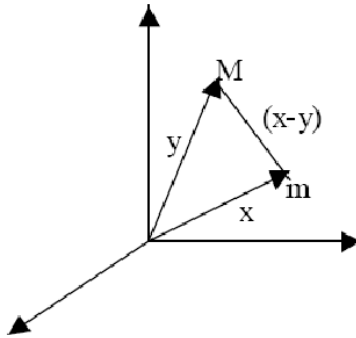
$$\nabla^2 F = f''(g)(g^2 - 4a^2) + f'(g)(2g) = 0 \Rightarrow \frac{f''(g)}{f'(g)} = \frac{-2g}{g^2 - 4a^2}. \text{ Integrando obtenemos:}$$

$$f'(g) = \frac{k_1}{g^2 - 4a^2} = \frac{k_1}{4a} \left(\frac{1}{g - 2a} - \frac{1}{g + 2a} \right). \text{ Integrando nuevamente llegamos a:}$$

$$f(g) = \frac{k_1}{4a} [\ln(g - 2a) - \ln(g + 2a)] + k_2.$$

Pregunta 2:

a)



Una de las primeras y quizás más ampliamente conocida de las leyes de Newton es la famosa ley de Gravitación Universal.

La ley dice que si tenemos 2 partículas una de masa m en X y otra de masa M en Y , la fuerza que actúa sobre la primera es:

$$F = -\gamma \frac{M m}{\|x - y\|^3} (x - y) .$$

Donde γ es la constante de gravitación universal.

Si $x(t)$ es la posición en el espacio de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza gravitatoria, debida a una masa M fija en el origen.

Pruebe que la energía $E(t) = \frac{m}{2} \|x'(t)\|^2 - \gamma \frac{M m}{\|x(t)\|}$ es conservada, es decir que $E'(t) = 0$.

Indicaciones: - Use la Segunda ley de Newton $F = m x''$
 - $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Solución:

Si la masa M está en el origen la fuerza toma la forma: $F(t) = -\gamma \frac{M m}{\|x(t)\|^3} x$.

Además sabemos que $\frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle = \langle x'(t), x(t) \rangle + \langle x(t), x'(t) \rangle = 2 \langle x'(t), x(t) \rangle$.

Luego la energía es: $E(t) = \frac{m}{2} \langle x'(t), x'(t) \rangle - \gamma \frac{M m}{\sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}}$. Derivando:

$$E'(t) = m \langle x''(t), x'(t) \rangle + \gamma \frac{M m}{\langle x(t), x(t) \rangle^{3/2}} \langle x'(t), x(t) \rangle$$

$$= \langle m x''(t), x'(t) \rangle + \langle x'(t), \left\{ \gamma \frac{M m}{\|x(t)\|^3} x(t) \right\} \rangle = \langle F(t), x'(t) \rangle + \langle m x'(t), -F(t) \rangle$$

$$= \langle F(t), x'(t) \rangle - \langle F(t), x'(t) \rangle = 0$$

b)

Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + G u = 0 \quad (*)$$

Se desea utilizar el cambio de variables $u = e^{\alpha x + \beta y} \cdot v$.

- Expresar la ecuación entregada en términos de las derivadas de v .
- Determine las condiciones que deben cumplir las constantes A,B,C,D,E y G tales que para α y β escogidos adecuadamente, se anulen los términos correspondientes a las derivadas de primer orden en la ecuación transformada.
- Aplique su resultado a la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Esto es, encuentre los valores de α y β que anulan las derivadas de primer orden en la ecuación transformada.

Solución:

i) Sea $h(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$, con lo que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \alpha h, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \alpha^2 h, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \beta h, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \beta^2 h.$$

Además tenemos $u = h v$. Derivando usamos la regla del producto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} v + h \frac{\partial v}{\partial x} = h \left(\alpha v + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \text{ y aplicándola nuevamente obtenemos:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} v + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = h \left(\alpha^2 v + 2 \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \text{ Análogamente ...}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} v + 2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = h \left(\beta^2 v + 2 \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} v + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + h \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = h \left(\alpha \beta v + \alpha \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right).$$

Luego la ecuación (*) queda:

$$A h \left(\alpha^2 v + 2 \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + B h \left(\alpha \beta v + \alpha \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + C h \left(\beta^2 v + 2 \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + D h \left(\alpha v + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + E h \left(\beta v + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F v = 0.$$

Donde los términos que acompañan a las derivadas de primer orden son: $(2\alpha A + B\beta + D)$ y $(2\beta C + B\alpha + E)$.

ii) Luego la condición para que se anulen las derivadas de primer orden es:

$$\begin{aligned} 2\alpha A + B\beta + D &= 0 \\ 2\beta C + B\alpha + E &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{iii) } A=1 \quad B=-1 \quad C=2 \quad D=E=1 \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= 1 + 2\alpha \\ \alpha &= 1 + 4\beta \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \frac{-5}{7}, \quad \beta = \frac{-3}{7}.$$

Pregunta 3:

a) Se dice que $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función potencial (o un campo gradiente vectorial) si existe $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $F(x) = \nabla f(x)$. Por otro lado, la curva $\phi: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una línea de flujo de F si $\phi'(t) = F(\phi(t))$.

- i) Muestre que $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (-y, x)$ NO es una función potencial.
- ii) Muestre que la fuerza electrostática Coulombiana actuando sobre una carga de magnitud q en la posición X debido a una carga de magnitud Q en el origen, dada por:

$$F(x) = \frac{\xi Q q}{\|x\|^3} x \text{ es una función potencial con } f(x) = -\frac{\xi Q q}{\|x\|}.$$

- iii) Considere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x, -y)$. Determine $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ sea una línea de flujo de F . ¿Qué curva describe el camino $\phi(t)$?
- iv) Dibuje $F(x, y)$ sobre el camino que pasa por (1,1).

Solución:

i) Supongamos que existe f tal que $F(x) = \nabla f(x)$, luego $\frac{\partial f}{\partial x} = -y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. Lo cual implica, por una parte que $f = -xy + k_1(y)$ y por la otra $f = xy + k_2(x)$. Igualando ambas expresiones: $k_1(y) - k_2(x) = 2xy$. Pero no existen dos funciones dependientes cada una de una sola de las variables tales que su combinación lineal sea el producto de estas, y por lo tanto f no existe.

ii) Basta calcular $\nabla f = \nabla \left(\frac{-\xi Q q}{\|x\|} \right) = \nabla \left(\frac{-\xi Q q}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} \right) = \left(\frac{\xi Q q}{\langle x, x \rangle^{3/2}} \right) x = \frac{\xi Q q}{\|x\|^3} x = F$.

Luego F es un campo gradiente vectorial.

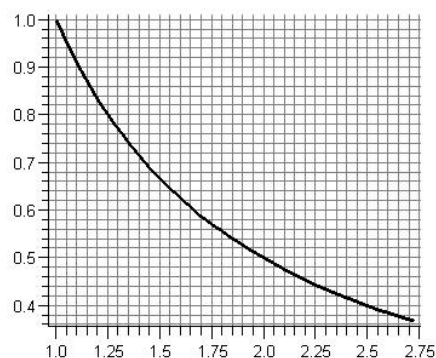
iii) Necesitamos que $\phi'(t) = F(\phi(t))$, lo que por componentes resulta en el sistema:

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \phi_1 & \Rightarrow & \phi_1 = k_1 e^x \\ \phi_2' &= -\phi_2 & \Rightarrow & \phi_2 = k_2 e^{-x} \end{aligned}$$

Al evaluar F sobre esta curva, los vectores resultan tangentes a

ésta (es por eso que se le llama línea de flujo de F). La curva que pasa por (1,1) es cuando

$k_1 = k_2 = 1$ y se ve como en el gráfico:



b) Sea $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-xt^2}}{t} dt$.

i) Encuentre $F'(x)$

ii) Claramente $F(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$. Explique por qué F está acotada en $[1, \infty)$.

Indicación:

1. Considere $G(u, v, w) = \int_u^v \frac{e^{-wt^2}}{t} dt$

2. Asuma cumplidas las hipótesis para aplicar la regla de Leibniz:

Si $\phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ con $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces: $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt$

Solución:

i) Consideramos $G(u, v, w) = \int_u^v \frac{e^{-wt^2}}{t} dt$ y $g(x) = (x, x^2, x)$. Usando el teorema fundamental del calculo obtenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{e^{-wu^2}}{u}, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{e^{-wv^2}}{v}. \text{ Además de la indicación: } \frac{\partial G}{\partial w} = -\int_u^v t e^{-wt^2} dt.$$

Luego, dado que $F(x) = G \circ g(x)$, por regla de la cadena:

$$F'(x) = \frac{\partial G}{\partial u}(g) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}(g) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial w}(g) \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{e^{-xx^2}}{x} + 2x \frac{e^{-xx^4}}{x^2} - \int_x^{x^2} t e^{-xt^2} dt = \frac{3}{2x} (e^{-x^5} - e^{-x^3})$$

ii) Puesto que $x \geq 1$, $x^2 \geq x$ y la integral de F es positiva, por lo que $F(x) \geq 0$. Asimismo

$-x^5 \leq -x^3 \Rightarrow e^{-x^5} - e^{-x^3} \Rightarrow F'(x) \leq 0$. Luego F es monótona decreciente y $F(x) \leq F(1) \quad \forall x \geq 1$. Luego F es acotada.