

## Pauta Control #1

### MA22A – Cálculo en Varias Variables – Semestre Verano 2006

**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.  
**Auxiliar:** Renzo Lüttges Cintolessi

**Fecha:**  
 23 de Diciembre de 2006

#### Pregunta 1:

a) Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  dos espacios vectoriales normados y  $\phi: X \rightarrow Y$  una transformación lineal. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes.

1.  $\phi$  es continua en 0.
2.  $\exists M > 0$  tal que,  $\forall x \in X$ ,  $\|\phi(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$ .
3.  $\phi$  es continua.

#### **Solución:**

$1 \Rightarrow 2$  : Como  $\phi$  es continua en 0, existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x\|_X < \delta$  entonces  $\|\phi(x)\|_Y < 1$ . Entonces, para  $x \in X$ , si  $x \neq 0$ ,  $\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta$ , por lo que  $\left\| \phi\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x\right) \right\|_Y < 1$ . Entonces, como  $\phi$  es lineal,  $\|\phi(x)\|_Y < \frac{2}{\delta} \|x\|_X$ , con  $M = \frac{2}{\delta}$ .

$2 \Rightarrow 3$  : sea  $x \in X$  y  $\epsilon > 0$ . si tomamos  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$  entonces  $\|y - x\|_X < \delta$  implica  $\|\phi(y) - \phi(x)\|_Y = \|\phi(y - x)\|_Y \leq M \|y - x\|_X < M \delta = \epsilon$ .

$3 \Rightarrow 1$  : trivial.

b) Considere  $X = C[0,1]$  con la norma  $\|f\|_X = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ ,  $Y = \mathbb{R}$  y la función  $I: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{Pruebe que } I(f) \text{ es una función continua.}$$

#### **Solución:**

$$\begin{aligned} |I(f) - I(f_0)| &= \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f_0(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f_0(x)| dx \\ &\leq \|f - f_0\| \int_0^1 dx = \|f - f_0\| < \delta = \epsilon. \text{ Luego } I(f) \text{ es continua.} \end{aligned}$$

c) Sean ahora  $X = C^1[0,1]$  (el espacio de las funciones  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables con derivada continua  $f' \in C[0,1]$ ) e  $Y = C[0,1]$ . Es claro que  $C^1[0,1] \subset C[0,1]$ , así que podemos ver a  $C^1[0,1]$  como un subespacio de  $C[0,1]$ .

Definimos la función  $D: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$  como  $D(f) = f'$ . (a D se le conoce como operador diferencial). Si utilizamos la **norma uniforme**  $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ :

1. ¿Es D Lineal?
2. ¿Es D continua?
3. ¿Contradice su resultado lo obtenido en la parte a) ? Explique.

Indicación: al analizar la continuidad puede serle de utilidad considerar la sucesión

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 \pi x) \text{ .}$$

**Solución:**

1. Es claro que D es lineal, pues la derivada en  $\mathbb{R}$  lo es.

2. Probaremos que D no es continua. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 \pi x) \text{ . Como } \|f_n\| = \frac{1}{n} \text{ , } f_n \rightarrow 0 \text{ en } C[0,1] \text{ . Sin embargo}$$

$$D(f_n) = n \pi \cos(n^2 \pi x) \text{ , con lo que } \|D(f_n)\| = n \pi \text{ , luego D no es continua en 0.}$$

3. Esto no contradice necesariamente a la parte a) , ya que una función lineal es necesariamente continua sólo en un espacio de dimensión finita, y en uno de dimensión infinita no tiene porqué serlo.

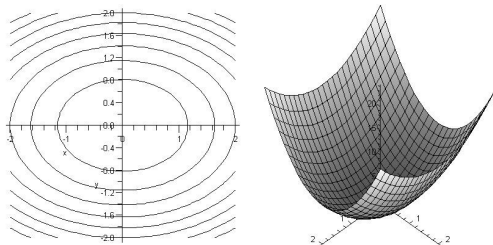
## Pregunta 2:

a) Relacione cada una de las siguientes funciones con su correspondiente gráfico y curvas de nivel.

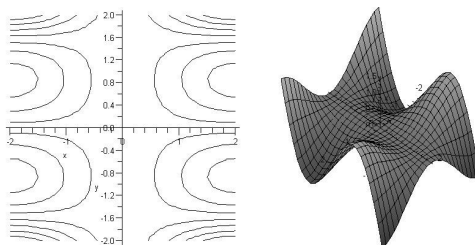
### Solución:

La correspondencia es:

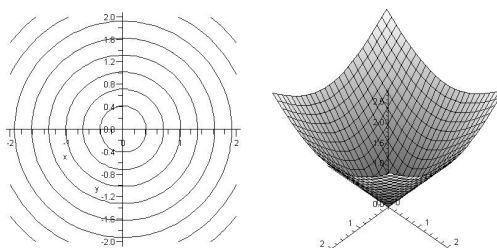
$$f_1(x, y) = 2x^2 + 4y^2$$



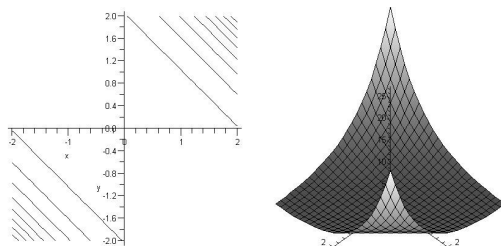
$$f_2(x, y) = xy \sin(x) \cos(y)$$



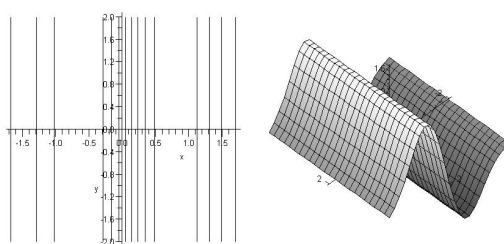
$$f_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$f_4(x, y) = \cosh(x+y)$$



$$f_5(x, y) = (3x + x^2)e^{-x^2}$$



b) Determine la existencia de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$  de las siguientes funciones:

$$1. f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$2. f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$3. f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{en funci3n de } \alpha \in \mathbb{R})$$

**Soluci3n:**

1. Como  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2}$ , existe un  $\sigma > 0$  tal que  $\left| \frac{1 - \cos(z)}{z^2} \right| \leq 1$  si  $|z| < \sigma$ . Por otro lado podemos escribir  $f(x, y)$  como:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y \frac{1 - \cos(x)}{x^2} - x y^2 \frac{1 - \cos(y)}{y^2}}{x^2 + y^2} \quad \text{luego para } |x| < \sigma \text{ y } |y| < \sigma, \text{ se tiene:}$$

$|f(x, y)| \leq \frac{x^2|y| + y^2|x|}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| = \|x\|_1$ . Luego si  $\delta \leq \min\{\sigma, \epsilon/2\}$  se tiene la continuidad de  $f$  en el origen.

$$2. |f(\rho, \theta)| = \left| \frac{\rho^3 (\cos^3 \theta \sin^3 \theta)}{\rho^2 + \rho^4 \cos^4 \theta} \right| = \rho \left| \frac{\cos^3 \theta \sin^3 \theta}{1 + \rho^2 \cos^4 \theta} \right| \leq \rho |\cos^3 \theta \sin^3 \theta| \rightarrow 0 \quad \text{luego } f \text{ continua.}$$

$$3. |f(x, y)| = \left| \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} \right| \leq \frac{x|y|^\alpha}{y^4 + x^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^4} \cdot (x^2 + y^4)^{\frac{\alpha}{4}}}{x^2 + y^4} = (x^2 + y^4)^{\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}}$$

Luego si  $\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \alpha > 2 \Rightarrow (x^2 + y^4)^{\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}} \rightarrow 0$  y  $f$  es continua.

Ahora bien, para  $\alpha \leq 2$  tenemos, tomando  $x = m y^2$ :

$$f(m y^2, y) = \frac{m|y|^{\alpha-2}}{m^2 y^4 + 1 + m^2}. \quad \text{Expresi3n que para } \alpha = 2 \text{ y tomando } \lim_{y \rightarrow 0} \text{ depende de } m.$$

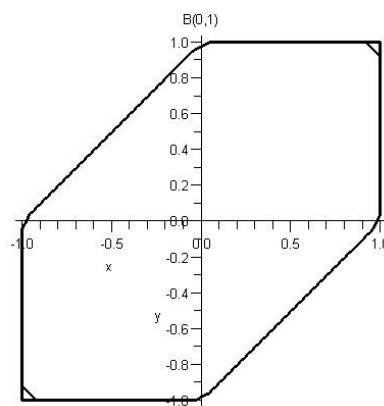
Si  $\alpha < 2$  la expresi3n diverge al tomar  $\lim_{y \rightarrow 0}$ . Luego  $f$  no es continua.

### Pregunta 3:

a) Sea el espacio  $E = \mathbb{R}^2$ , considere la función:  $N(x, y) = \sup(|x|, |y|, |x-y|)$ .  
Muestre que N es una norma y dibuje la bola unitaria ( $B(0,1) = \{x \in E / N(x,0) \leq 1\}$ ).

#### Solución:

1.  $0 \leq N(x, y) \leq \infty$  pues para cada  $(x, y)$ , N entrega un módulo en  $\mathbb{R}$ , lo cual es norma.
  2.  $N(x, y) = 0 \Rightarrow |x| = |y| = |x-y| = 0 \Rightarrow (x, y) = 0$
  3.  $N(\lambda x, \lambda y) = \sup(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|) = |\lambda| \cdot \sup(|x|, |y|, |x-y|) = |\lambda| \cdot N(x, y)$
  4. N cumple la desigualdad triangular pues para cada  $(x, y)$ , N entrega un módulo en  $\mathbb{R}$  que cumple la desigualdad.
- La bola unitaria resulta:



c) Considere el espacio  $E = C^1[0,1]$  (las funciones de variable real sobre  $[0,1]$  con derivada continua). Sea la función  $N: C^1[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$N(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

1. Muestre que N es una norma.
2. ¿Es N equivalente a  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ ?

#### Solución:

$N(f) \geq 0$  pues es una suma de módulos. Además es acotada pues toda función continua sobre un intervalo compacto de los reales alcanza sus cotas.

Es trivial que  $f(x) = 0 \forall x \Rightarrow N(f) = 0$ . Además

$$N(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0 \wedge \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = 0 \text{ pues se trata de módulos. Luego}$$

$$f'(x) = 0 \forall x \Rightarrow f \text{ constante con } f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |(\lambda f)'(x)| = |\lambda| \left[ |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \right] = |\lambda| N(f)$$

Además N cumple la desigualdad triangular porque es suma de módulos y estos la cumplen, donde además el supremo funciona bien con las desigualdades.

b) Sea  $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  definida por:  $f(x, y) = \left( \frac{x+y}{2}, \frac{2xy}{x+y} \right)$ . Considere la sucesión  $X_n$  de  $\mathbb{R}^2$  definida por la recurrencia:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= f(X_n) \quad \forall n \geq 0 \\ X_0 &= (x_0, y_0) \quad \text{con } x_0 > y_0 > 0. \end{aligned}$$

1. Muestre que la sucesión está bien definida.
2. Estudie la convergencia de  $X_n$ .
3. De existir, determine su límite.

**Indicación:** Puede serle útil para algunas partes estudiar la sucesión  $x_n \cdot y_n$ . Con  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

**Solución:**

1. Veamos que  $y_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}$  no se indefine. Esto es,  $x_n + y_n \neq 0 \quad \forall n$ .

Esto se tiene pues  $x_0$  e  $y_0$  son ambos positivos, y  $f$  va del primer cuadrante de  $\mathbb{R}^2$  en este mismo conjunto, con lo cual  $x_n$  e  $y_n$  son distintos de cero para todo  $n$ .

2. Mostraremos que  $X_n$  es convergente mediante la convergencia de sus componentes  $x_n$  e  $y_n$ . Siguiendo la indicación calculamos el producto:

$$x_n \cdot y_n = \left( \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} \right) \cdot \left( \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} \right) = x_{n-1}y_{n-1} \quad \text{análogamente se tiene } x_n \cdot y_n = x_0 y_0 \quad \forall n.$$

Con esto podemos escribir:  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_0 y_0}{2x_n}$  e  $y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n}$ . Por otra parte, puesto que la media armónica es siempre menor o igual a la aritmética, se tiene que  $y_n \leq x_n \quad \forall n$ , con lo cual podemos demostrar que  $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq x_n$ . Luego  $x_n$  es una sucesión decreciente, con lo cual  $y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n}$  es creciente. Veamos ahora que son acotadas:

$x_0 > y_0$  por enunciado. Bastará ver que  $x_n \geq y_0 \Rightarrow x_{n+1} \geq y_0$ , lo cual se tiene pues

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \underset{\text{por hipótesis}}{\geq} \frac{y_0 + y_n}{2} \underset{y_n \text{ creciente}}{\geq} \frac{y_0 + y_0}{2} = y_0. \quad \text{Con esta cota conocida para } x_n$$

podemos acotar  $y_n$  como sigue:  $y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n} \leq \frac{x_0 y_0}{y_0} = x_0$ . Ahora tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \in \mathbb{R} \text{ decreciente y acotada inferiormente} \\ y_n \in \mathbb{R} \text{ creciente y acotada superiormente} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ambas convergen}.$$

3. Sean  $L_x$  y  $L_y$  los límites de  $x_n$  e  $y_n$  respectivamente. Tomando límite a ambos lados de las igualdades:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \Rightarrow L_x = \frac{L_x + L_y}{2} \Rightarrow L_x = L_y = L \quad y_n = \frac{x_0 y_0}{x_n} \Rightarrow L = \frac{x_0 y_0}{L} \Rightarrow L = \sqrt{x_0 y_0}.$$