

## Clase Auxiliar #3

### MA22A – Cálculo en Varias Variables – Semestre Verano 2006

**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.  
**Auxiliar:** Renzo Lüttges Cintolesi

**Fecha:**  
20 de Diciembre de 2006

#### Problema 1 [Cambio a coordenadas polares]:

Sea  $A = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  y sea  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación definida por  
 $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ .

1. Demostrar que  $g$  es una biyección continua de  $A$  sobre  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  tal que  
 $g\{(\rho, \theta) \in A: 0 < \rho < r, 0 < \theta < 2\pi\} = B((0,0), r)$
2. Dada  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sea  $F = f \circ g$ . Demostrar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = a$  si y sólo si, dado  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \rho < \delta$  entonces  $|F(\rho, \theta) - a| \leq \epsilon$ , para todo  $\theta \in (0, 2\pi]$

#### Problema 2:

a) Analizar la continuidad en el origen de las siguientes funciones en función de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$1. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$2. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|^\alpha}{x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Determinar la existencia de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , de existir el límite, calcularlo.

$$1. \quad f(x, y) = \frac{x^2y + x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$

$$2. \quad f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

### Problema 3:

Sean los espacios normados  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(n)})$  y  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{(m)})$ , sea  $\Delta$  el espacio de todas las funciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  y sea  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación lineal en  $\Delta$ .

1. Demuestre que  $\forall L \in \Delta, \exists c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|L(x)\|_{(m)} \leq c \|x\|_{(n)}$ .
2. Sea  $\|\cdot\|: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  definida como:

$$\|L\| = \inf(A) \quad \text{donde}$$

$$A = \{c \geq 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n \|L(x)\|_{(m)} \leq c \|x\|_{(n)}\}.$$

Muestre que  $\|\cdot\|$  está bien definida y que  $(\Delta, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado.