

Tarea #1 - Topología

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Profesor: Marcelo Leseigneur P.

Fecha:

15 de Diciembre de 2006

Auxiliares: Renzo Lüttges Cintolesi

Fecha Entrega:

21 de Diciembre de 2006

Problema 1: Sea C el conjunto de todas las funciones reales continuas en $[0,1]$. Para cada $f, g \in C$ se definen:

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, \quad \sigma(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \Gamma(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

a) Suponga que $f \neq g$. Luego $\exists t_0$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$. Pruebe que existe un intervalo $I \subseteq [0,1]$ tal que $|f(t) - g(t)| \geq \frac{1}{2} |f(t_0) - g(t_0)|$ para todo $t \in I$. Deduzca que $\sigma(f, g) > 0$ y $\Gamma(f, g) > 0$.

b) Pruebe que ρ, σ , y Γ son métricas en C .

Indicación: Puede serle útil emplear la desigualdad de Schwartz para integrales:

$$\left(\int_0^1 \phi(t) \psi(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \phi^2(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 \psi^2(t) dt \right)$$

c) Pruebe que para todo $f, g \in C$ se tiene:

$$\rho(f, g) \geq \sigma(f, g) \geq \Gamma(f, g)$$

d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Y sea $f(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$.

- Pruebe que $f_n \rightarrow f$ si $n \rightarrow \infty$ en (C, ρ)
- ¿Converge f_n a f en (C, Γ) ? Justifique.
- Pruebe que f_n no converge a f en (C, σ)

Pregunta 2:

a) Considere el conjunto $C^1[0,1]$ de todas las funciones reales definidas en $[0,1]$ con primera derivada continua en $[0,1]$. Muestre que:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt \quad \text{define un producto interno en } C^1[0,1] .$$

b) En el espacio $C[1,e]$ se define $\langle f, g \rangle = \int_1^e \ln(t) f(t) g(t) dt$

1. Demostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno
2. Calcule $\|f\|$ inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si $f(x) = \sqrt{x}$.
3. Hallar un polinomio de 1º grado $g(x) = ax + b$ que sea ortogonal a la función $f(x) = 1$.

Pregunta 3:

a) Probar que en todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se tiene que:

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

b) Probar que para dos vectores x e y cualquiera se verifica:

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Pregunta 4:

Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n . En E se define la función $N: E \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$N(p) = \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)|$$

1. Demuestre que N es una norma en E
2. Encuentre $L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in E \quad N(p) \leq L \cdot \max\{|a_i|\}$ con $i=0..n$ y

$$p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i .$$

3. Sea $M = \{p \mid p \in E\}$ donde $p(t) = 1 + t + \dots + t^n$. Determine $M \cap B_N(0,1)$.

Problema 5:

Sea $E = [0, \infty)$. Se define una aplicación de $E \times E$ en \mathbb{R} por:

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|$$

1. Muestre que d es una métrica en E
2. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión en E definida por $x_n = n$
 ¿Es $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $(E, |\cdot|)$?
 ¿Es $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en (E, d) ?

Problema 6:

Sea $C[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ continua}\}$. Se definen:

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{y} \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

1. Muestre que d_∞ y d_1 son métricas,
2. Muestre que $(C[0, 1], d_\infty)$ es completo.
3. Sea la siguiente sucesión de funciones.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1/2 - 1/n) \\ n(x - 1/2) & \text{si } x \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n) \\ 1 & \text{si } x \in [1/2 + 1/n, 1) \end{cases}$$

¿Es $\{f_n\}$ de Cauchy en $(C[0, 1], d_1)$? ¿Es $(C[0, 1], d_1)$ completo ?

Problema 7:

Indique el gráfico que corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones en \mathbb{R}^3 .

1. $z = x - y^2$
2. $z = x^2 - y^2$
3. $1 = x^2 - y^2$
4. $z = (x - y)^2$
5. $z = \ln(|xy| + 1)$.

Pregunta 8:

a) Sean f y g las siguientes funciones reales de dos variables:

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{1 - \cos(x) + y} \quad , \quad g(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{1 - \cos(x) + |y|} \quad .$$

Analice la existencia de $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ y de $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y)$. En caso de existir alguno de los límites, calcule su valor.

b) Analice la existencia de $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)}$ de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \frac{xy^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^3} \quad , \quad g(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^3} \quad , \quad h(x, y) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right)}}{|y| + e^{\frac{1}{|x|}}} \quad .$$