

Clase Auxiliar #1

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Renzo Lüttges Cintolesi

Fecha:
13 de Diciembre de 2006

Problema 1 [Desigualdad de Hölder]:

Sean a_i y b_i dos sucesiones reales. Considere los reales p y q tales que $p \in (1, \infty)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Problema 2:

- i) Considere el espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Determine las condiciones que debe cumplir la matriz P de $n \times n$ para que la función:

$$\|x\|_p = \|Px\| \text{ sea una norma en } \mathbb{R}^n.$$

- ii) Haga el dibujo de $B(\vec{0}, 1)$ correspondiente a la norma $\|\vec{x}\| = \left(\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Problema 3:

Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto. Una función $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ultramétrica si y sólo si:

- u1.- $\forall x, y \in E, 0 \leq d(x, y) < +\infty \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- u2.- $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
- u2.- $\forall x, y \in E, d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$

- i) Probar que una ultramétrica es también métrica y que la métrica discreta es una ultramétrica.
- ii) Pruebe que $\forall x, y, z \in E, d(x, y) > d(y, z) \Rightarrow d(x, y) = d(x, z)$. Concluya que todos los triángulos en E son isósceles.
- iii) Pruebe que para cualquier $y \in E$ fijo y $r > 0$ fijo, se tiene que:
 $S = \{x \in E \mid d(x, y) = r\}$ es Abierto.