FI34-A
RELATIVIDAD ESPECIAL

Claudio Romero

Noviembre de 1995

INTRODUCCION

La luz (onda electromagnética) juega un rol central en la teoría de la relatividad. Su estudio desde un punto de vista científico comenzó durante el Renacimiento y alcanzó un alto grado de desarrollo con Isaac Newton y Christian Huygens. Estos científicos sustentaban hipótesis distintas acerca de la naturaleza de la luz. Mientras Newton postulaba que la luz estaba constituída por pequeños proyectiles que se movían con mucha rapidez, Huygens visualizaba la luz como una onda. El medio en el cual se propagaba esta onda recibió el nombre de *éter* y se suponía que jugaba un rol análogo al que le corresponde a un medio elástico en la propagación de un onda mecánica.

A comienzos de 1800 Thomas Young (1773-1829) observó por primera vez, interferencia con haces de luz. Este experimento fué crucial para la aceptación de la interpretación ondulatoria de la luz. Posteriormente, en 1873, James Clerk Maxwell logró unificar las teorías de electricidad y magnetismo. Utilizando la nueva teoría unificada, predijo la existencia de ondas electromagnéticas cuya velocidad de propagación es la velocidad de la luz en el espacio vacío

$$c = 2.997924 \times \ 10^8 \ m/s \tag{1}$$

Trece años más tarde, en 1886, Heinrich Hertz logró generar por primera vez ondas electromagnéticas con un dispositivo fabricado en su laboratorio. Subsistía sin embargo el problema de detectar el medio en cual la luz se propagaba. Si ese medio existía, deberían haber efectos físicos medibles asociados al movimiento de la fuente luminosa o del observador con respecto al éter – análogamente a lo que ocurre cuando una fuente de sonido se propaga en el aire a velocidades cercanas a la del sonido (ondas de choque). Sin embargo, este tipo de efectos no se observan con ondas electromagnéticas. Incluso, se sustentaba la hipótesis que el éter podía ser un sistema de referencia absoluto y lógicamente la tierra y todos los demás cuerpos tendrían una velocidad dada con respecto a este sistema de referencia. Sin embargo, en 1881, Albert Michelson y posteriormente Edward Morley en 1887, demostraron experimentalmente que la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente y que su valor es $c = 2.997924\ m/s$. Este experimento hechó por tierra, definitivamente, la idea del éter y se aceptó que las ondas electromagnéticas se propagan en el espacio vacío.

En 1905 Albert Einstein publicó sus ideas sobre relatividad en un trabajo titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento". Allí, Einstein postula que el movimiento absoluto no puede ser detectado mediante ningún experimento y que la velocidad de la luz tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. Esta teoría incluye en sus postulados los resultados de los experimentos de Michelson y Morley aún cuando, aparentemente, Einstein no estaba al tanto de ellos cuando elaboró su trabajo.

La exposición de estos apuntes comienza con la traducción de las dos primeras secciones del trabajo original de Einstein (Secciones 1.1 y 1.2) para luego continuar con el desarrollo del tema siguiendo el método que se consideró más apropiado para este curso.

1 CINEMATICA

1.1 Definición de simultaneidad

Considere un sistema de coordenadas en el cual las ecuaciones de la mecánica de Newton son válidas. Con el objeto de distinguir este sistema de otros sistemas de coordenadas que serán introducidos más tarde, y con el propósito de clarificar la presentación, se le llamará *sistema estacionario.*

Si un punto material está en reposo relativo a este sistema de coordenadas, su posición con respecto a él puede ser determinada con la ayuda de una regla rígida empleando los métodos de la geometría Euclidiana, y puede ser expresada en término de coordenadas Cartesianas.

Cuando se describe el *movimiento* de un punto material, lo que hacemos es entregar el valor de sus coordenadas como funciones del tiempo. Es prudente tener en mente que tal descripción matemática tiene sentido físico sólo cuando se ha establecido previamente, y en forma clara, que es lo que se entiende aquí por la palabra *tiempo.* Es necesario hacer notar que, todos nuestros juicios en los cuales el tiempo juega un rol, son siempre juicios sobre *ocurrencias simultáneas.* Por ejemplo, cuando yo digo:"El tren llega aquí a las 7 en punto,"significa algo asi como lo siguiente: "La situación en la cual los punteros de mi reloj marcan las 7 y la llegada del tren a la posición que yo ocupo, son eventos simultáneos".

Aparentemente, sería posible remontar todas la dificultades conectadas con la definición de "tiempo"mediante la sustitución "la posición de la manecillas de mi reloj"por "tiempo."Tal definición es en efecto suficiente cuando es cuestión de definir el tiempo exclusivamente en el lugar donde el reloj está ubicado, pero deja de ser satisfactoria cuando se trata de conectar en el tiempo una serie de eventos que ocurren en diferentes lugares, o –lo que es lo mismo– establecer el tiempo de eventos que ocurren en lugares remotamente alejados del reloj.

Resulta claro que podríamos contentarnos con determinar el tiempo de cada evento teniendo un observador premunido de un reloj, en el origen de coordenadas y asociar la posición de la manecilla del reloj con la llegada, a través del espacio vacío, de una señal luminosa producida por el evento en estudio. Pero, como sabemos por experiencia, esta asociación tiene la desventaja de no ser independiente de la posición del observador que posee el reloj. Podemos, sin embargo, llegar a una determinación más práctica a través de la siguiente consideración.

Si un reloj está ubicado en el punto A del espacio , entonces un observador en A puede determinar el tiempo de los eventos en la vecindad immediata de A tomando nota de la posición de las manecillas del reloj que son simultáneas con esos eventos. Si hay un reloj en el punto B del espacio – mas precisamente, agregemos que se trata de ün reloj de idéntica construcción que aquel ubicado en A- entonces el tiempo de los eventos en la vecindad immediata de B puede ser determinado análogamente por un observador colocado en B.[1] Sin embargo, sin una estipulación más precisa es imposible comparar los tiempos de un evento que ocurre en A con un evento que ocurre en B; pues

[1]El punto A y el punto B están en reposo en el sistema estacionario

sólo hemos definido un "tiempo-A"y un "tiempo-B", pero no hemos definido un "tiempo"común para A y B. Este último tiempo puede, sin embargo, ser definido si nosotros establecemos, *por definición*, que el tiempo que requiere la luz para viajar desde A a B es igual al tiempo que ésta requiere para viajar desde B hasta A[2]. Así, consideremos un rayo de luz que parte desde A hacia B en el "tiempo-A" t_A, es reflejado en B hacia A en el "tiempo-B" t_B y retorna a A en el "tiempo-A" t'_A. Por definición, los dos relojes funcionan en sincronía cuando:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \tag{2}$$

Suponemos que esta definición de sincronismo no admite contradicciones y que puede ser aplicada a cualquier número de puntos; consecuentemente, las siguientes condiciones son satisfechas en general:

1. Cuando el reloj en B es sincrónico con el reloj en A, entonces el reloj en A es sincrónico con el reloj en B.

2. Cuando el reloj en A es sincrónico con el reloj en B y con el reloj en C, entonces los relojes en B y en C son mutuamente sincrónicos.

De esta manera hemos establecido, con la ayuda de ciertos procedimientos físicos (imaginados), que es lo que se debe entender por relojes funcionando sincrónicamente, en reposo en diferentes lugares y, mediante ellos, hemos adquirido evidentemente una definición de "simultaneidad"y de "tiempo."El "tiempo"de un evento es la indicación, simultánea con el evento, de un reloj estacionario ubicado en el lugar del evento, y que, para todas las determinaciones de tiempo, funciona en sincronismo con un reloj particular, también estacionario.

Además, en concordancia con la experiencia, estipulamos que la cantidad

$$2\overline{AB}/(t'_A - t_A) = c \tag{3}$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío). En esta expresión, $\overline{AB}$ es la distancia que separa a los relojes estacionarios A y B.

El punto esencial es que hemos definido tiempo mediante relojes en *reposo en el sistema estacionario*. Debido a su asociación con el sistema estacionario, llamamos al tiempo definido de esta manera, "el tiempo del sistema estacionario."

[2]Isotropía del espacio

1.2 Sobre la relatividad de las longitudes y de los tiempos

Las siguientes consideraciones están basadas en el principio de relatividad y en el principio de la constancia de la velocidad de la luz. Definimos estos dos principios de la siguiente manera:

1. Las leyes de acuerdo a las cuales los estados de los sistemas físicos varían, no son dependientes de si estos cambios son referidos uno u a otro de dos sistemas de coordenadas (inerciales) que están en movimiento translacional relativo uniforme.

2. Todo rayo de luz se mueve en el sistema de coordenadas "estacionario"con una velocidad fija c, independientemente de si este rayo es emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento. Aquí

$$velocidad = \frac{camino\ que\ recorre\ la\ luz}{intervalo\ de\ tiempo} \tag{4}$$

   donde el intervalo de tiempo debe ser tomado en el sentido de la definición dada en la Sec. 1.1

Supongamos que se tiene una barra rígida estacionaria, cuya longitud es l_0 cuando es medida con una regla, también estacionaria. Imaginemos ahora el eje de la barra colocado a lo largo del eje X del sistema de coordenadas estacionario, y que entonces se le imparte un movimiento de translación (de velocidad v) paralelo al eje X en la dirección de las x crecientes. Ahora preguntamos sobre la longitud de la barra *en movimiento*, que supondremos se establece a través de las dos operaciones que se describen a continuación:

a) El observador y la regla para medir – mencionada anteriormente – se mueven junto con la barra que va a ser medida, y mide la longitud de la barra directamente, poniendo la regla para medir a lo largo de la barra; i.e. de la misma manera que cuando la barra, el observador y la regla para medir están en reposo en el sistema estacionario.

b) Mediante relojes estacionarios instalados en el sistema estacionario y sincronizados de acuerdo al procedimiento de la Sec. 1.1, el observador toma nota de los puntos en el sistema estacionario, en los cuales están ubicados los extremos de la barra a un tiempo especificado como t. La distancia entre estos puntos, medida con la regla de medir empleada anteriormente – que en este caso es estacionaria – es una longitud, que puede ser llamada la "longitud de la barra."

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud obtenida con la operación (a), que llamaremos "la longitud de la barra en el sistema en movimiento,"[3] debe ser igual a la longitud l_0 de la barra estacionaria.

La longitud obtenida con la operación (b), que llamaremos "la longitud de la barra (en movimiento) en el sistema estacionario,"la determinaremos en base a nuestros dos principios, y encontraremos que difiere de l_0.

La cinemática utilizada en su forma usual contiene la suposición tácita que las longitudes determinadas por nuestras dos operaciones son exactamente iguales, o, en otras palabras, que en un instante de tiempo dado t, el cuerpo en movimiento es completamente reemplazable, desde el punto de vista geométrico, por el *mismo* cuerpo, cuando se encuentra *en reposo* en una posición dada.

Imaginemos ahora, que en los dos extremos (A y B) de la barra [4] se han colocado relojes que sincronizan con los relojes del sistema estacionario, i.e., sus lecturas corresponden en cualquier instante al "tiempo del sistema estacionario"en el lugar donde ellos se encuentran en ese momento; así, estos relojes son "sincrónicos en el sistema estacionario".

Imaginemos también que cada reloj está acompañado de un observador, y que estos observadores utilizan el criterio establecido en la Sec. 1.1 para verificar la sincronización de dos relojes. Suponga que, al tiempo t_A [5], un rayo de luz parte desde A, es reflejado en B al tiempo t_B, y vuelve a A al tiempo t'_A. Tomando en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz, encontramos

$$t_B - t_A = r_{AB}/(c - v) \tag{5}$$

y

$$t'_A - t_B = r_{AB}/(c + v) \tag{6}$$

donde r_{AB} corresponde a la longitud de la barra en movimiento – medida en el sistema estacionario. Los observadores que acompañan a la barra en movi-

[3]Esta longitud se denomina longitud propia o longitud en el sistema de referencia donde la barra está en reposo.

[4]De la barra en *movimiento*

[5]tiempo aquí significa, *tiempo del sistema estacionario*

miento encontrarían que los dos relojes no son sincrónicos, mientras que los observadores en el sistema estacionario declararían que ellos son sincrónicos.

De aquí se deduce que no podemos asociar un significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, sino sólo decir que , cuando dos eventos vistos desde un sistema de coordenadas dado son simultáneos, no pueden ser considerados jamás como simultáneos cuando son vistos desde un sistema moviéndose relativo al sistema dado (a menos que ocurran en el mismo lugar).

1.3 Teoría de las transformaciones de coordenadas y tiempo desde un sistema estacionario a uno que tiene, relativo a éste, un movimiento translacional uniforme

Identifiquemos al sistema de referencia inercial estacionario (o laboratorio) con la letra S. Consiste de tres ejes de coordenadas x, y, z mutuamente ortogonales y de un conjunto de relojes colocados en cada punto del espacio los cuales están sincronizados de acuerdo al procedimiento descrito en la sección 1.1. Sea S' un segundo sistema de referencia inercial. Al igual que S, posee tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares x', y', z' y un conjunto de relojes sincronizados de acuerdo al procedimiento indicado en la sección 1.1. Los ejes de coordenada de ambos sistemas de referencia son paralelos entre sí y supondremos que el sistema de referencia inercial S' se desplaza en la dirección positiva del eje x con velocidad v, de acuerdo a observadores en S.

A cada conjunto de valores x, y, z, t que especifican completamente el lugar y tiempo de un evento en el sistema S, corresponde un conjunto de valores x', y', z', t' que especifican el mismo evento en el sistema de referencia S'. El problema es encontrar las ecuaciones (ecuaciones de transformación) que relacionan ambos conjuntos de coordenadas.

Lo primero que notamos es que dichas ecuaciones deben ser lineales pues, tanto el espacio como el tiempo son cantidades homogéneas. Esto significa que la longitud de una barra es independiente del lugar en que se encuentra cuando es medida. Análogamente, el tamaño de los intervalos de tiempo debe ser el mismo entre 5 y 10 segundos que entre 44 y 49 segundos. Estas características no podrían ser preservadas si la ecuación que relaciona las coordenadas de ambos sistemas de referencia, no fuera lineal[6]. Consecuentemente, las ecuaciones de transformación deben tener la forma siguiente

$$
\begin{aligned}
x^{'} &= a_{11}\, x + \ a_{12}\, y + \ a_{13}\, z + \ a_{14}\, t \\
y^{'} &= a_{21}\, x + \ a_{22}\, y + \ a_{23}\, z + \ a_{24}\, t \\
z^{'} &= a_{31}\, x + \ a_{32}\, y + \ a_{33}\, z + \ a_{34}\, t \\
t^{'} &= a_{41}\, x + \ a_{42}\, y + \ a_{43}\, z + \ a_{44}\, t
\end{aligned}
\tag{9}
$$

donde los coeficientes a_{ij} son funciones independientes de las coordenadas del evento.

Para comenzar, demostremos que las coordenadas perpendiculares a la dirección de la velocidad relativa, no cambian; i.e.

$$y^{'} = y \qquad z^{'} = z \tag{10}$$

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales S y S' cuyos ejes de coordenadas son mutuamente paralelos. Supongamos además que S' se mueve con velocidad v con respecto a S en la dirección positiva del eje x. Los observadores de ambos sistemas están premunidos de reglas para medir, idénticas, de longitud propia unitaria. Hagamos coincidir los orígenes O y O' en $t = t' = 0$ y orientemos las reglas para medir perpendiculares a la dirección del movimiento. Al extremo de la regla en S cuyas coordenadas son $x = 0, y = 1\ m, z = 0$ adosamos un lápiz de color que permite trazar una línea *indeleble* sobre el sistema $S^{'}$ a medida que éste se desplaza. Si esa línea aparece debajo (o sobre) la recta $y^{'} = 1\ m$, es algo que puede ser verificado por los observadores de cada sistema. Ambos grupos concluirían que el tamaño de la regla de un metro en reposo en $S^{'}$ es mayor que el de la regla de un metro, medida en reposo en S. Este experimento indicaría la existencia

[6]Por ejemplo, si la relación entre x y $x^{'}$ fuera no lineal

$$x^{'} = a_{11} x^2 \tag{7}$$

la longitud de una barra en el sistema de referencia $S^{'}$ resultaría ser

$$x_2^{'} - x_1^{'} = a_{11}(1 - 9) = 8 a_{11}\ m \tag{8}$$

cuando las coordenadas en el sistema estacionario son $x_1 = 1\ m$ y $x_2 = 3\ m$. Pero, resultaría igual a $12 a_{11}\ m$ cuando la posición de los extremos de la barra en el sistema inercial S fuera $x_1 = 2\ m$ y $x_2 = 4\ m$.

de un sistema inercial privilegiado (aquel donde los metros son más largos o más cortos) y estaría en contradicción con el principio de relatividad. Este problema desaparece si $y^{'} = y$ y que $z^{'} = z$; i.e.

$$a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0 \tag{11}$$

Por otra parte, $t^{'}$ no puede depender de las coordenadas y o z. Si así fuera, eventos simultáneos en S que ocurren en las posiciones (x, y, z) y $(x, -y, z)$ no serían simultáneos en $S^{'}$, a pesar de estar simétricamente dispuestos con respecto al movimiento relativo de los sistemas de referencia. Esta situación contradeciría la isotropía del espacio, luego es necesario que

$$a_{42} = a_{43} = 0 \tag{12}$$

Un argumento similar se usa para demostrar que $a_{12} = a_{13} = 0$. Adem'as, sabemos que la trayectoria en S de un evento que ocurre $x^{'} = 0$ está dada por la expresión $x = vt$. Usando esta información obtenemos que los coeficientes a_{11} y a_{14} satisfacen la relación

$$a_{14} = -v\ a_{11} \tag{13}$$

Reescribiendo las ecuaciones de transformación (9)

$$x^{'} = a_{11}(x - vt) \tag{14}$$

$$t^{'} = a_{41}\ x + a_{44}\ t \tag{15}$$

Ahora usaremos el principio de constancia de la velocidad de la luz. Supongamos que en $t = 0$ los orígenes de ambos sistemas de referencia coinciden y que los relojes ubicados en esa posición marcan cero en ambos sistemas. En ese instante se emite un flash de luz en todas la direcciones. En cada uno de los sistemas de referencia la luz viaja con la misma velocidad de manera que se cumple que

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{16}$$

y

$$x^{'2} + y^{'2} + z^{'2} = c^2 t^{'2} = {a_{11}}^2 (x - vt)^2 = c^2 (a_{41} x + a_{44} t)^2 \tag{17}$$

donde se han utilizado las ecuaciones (15). Reordenando:

$$x^2({a_{11}}^2 - c^2 {a_{41}}^2) + y^2 + z^2 - 2xt({a_{11}}^2 v + c^2 a_{41} a_{44}) + ({a_{11}}^2 v^2 - c^2 {a_{44}}^2) = 0 \tag{18}$$

Comparando los coeficientes de las diferentes potencias de las coordenadas en (16) y (17), se tiene:

$$a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \qquad a_{11}^2 v^2 - c^2 a_{44}^2 = -\, c^2 \qquad -\, a_{11}^2 v = c^2 a_{41} a_{44} \tag{19}$$

De estas tres ecuaciones se obtiene que

$$a_{11} = a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{20}$$

$$a_{41} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{21}$$

Con estos resultados, las ecuaciones de transformación (*Transformaciones de Lorentz*) adquieren la forma

$$x^{'} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{22}$$

$$t^{'} = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{23}$$

$$y^{'} = y \tag{24}$$

$$z^{'} = z \tag{25}$$

Note que el sistema de referencia inercial S se mueve con velocidad $-v$ con respecto a $S^{'}$. Luego, la **Transformación inversa**, que expresa las coordenadas de S en función de las de $S^{'}$ se obtiene de las expresiones recién escritas cambiando v en $-v$ e intercambiando $x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'}$ por x, y, z, t. Explícitamente:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{26}$$

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{27}$$

$$y = y' \tag{28}$$

$$z = z' \tag{29}$$

Note también que cuando $v << c$, el valor de la raíz cuadrada en denominador tiende al valor 1 y las ecuaciones de transformación tienden a la expresión de las transformaciones de Galileo.

Contracción de Lorentz

Calculemos explícitamente la longitud de una barra en el sistema de referencia donde ella se mueve con velocidad v en la dirección positiva del eje x. Por definición, la longitud de la barra en S es la magnitud de la diferencia de coordenadas entre los extremos de la barra, medidos al mismo tiempo. Sean x_1 y x_2 esas coordenadas medidas en el sistema S al *mismo tiempo* y sea l_0 la longitud de la barra en el sistema S' – solidario a ella. Sean x_1' y x_2' las coordenadas de los extremos de la barra en S'.

Usando las transformaciones de Lorentz podemos escribir:

$$x_1' = \frac{x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{30}$$

$$x_2' = \frac{x_2 + vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{31}$$

Restando ambas expresiones y recordando que $t_1 = t_2$:

$$l = x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - v^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{32}$$

Este resultado muestra que la longitud de la barra l, medida por observadores con respecto a los cuales ésta mueve con velocidad v, resulta ser menor que el valor obtenido por observadores con respecto a los cuales la barra está en reposo. Este resultado recibe el nombre de *contracción de Lorentz.*

Dilatación del tiempo

Calculemos ahora el intervalo de tiempo que transcurre entre dos eventos (x_1', t_1') y (x_2', t_2') que suceden en el mismo lugar (i.e. $x_1' = x_2'$) en un sistema de referencia dado S' . Esos eventos pueden ser dos posiciones sucesivas de las manecillas de un reloj estacionario en S'. Desde un segundo sistema de referencia S con respecto al cual el reloj se mueve con velocidad $+v$, se observa que el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ entre ambos eventos es distinto que $\Delta t' = t_2' - t_1'$. (Note que desde S el reloj experimenta un desplazamiento $\Delta x = v\ \Delta t$ durante el intervalo de tiempo Δt que separa a ambos eventos en el sistema de referencia S). Utilizando las transformaciones de Lorentz y tomando en consideración que $x_1^{'} = x_2^{'}$, se tiene que:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2{}' - t_1{}'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{33}$$

donde el intervalo de tiempo $\Delta t' \equiv \tau_0$ recibe el nombre de tiempo propio. Claramente el intervalo de tiempo entre ambos eventos medido en S es mayor que en $S^{'}$. **EJEMPLO** Considere dos eventos que ocurren en el mismo punto $x_0{}'$ en tiempos $t_1{}'$ y $t_2{}'$ en el sistema de referencia $S^{'}$, que se mueve son velocidad $-v$ en la dirección negativa del eje x, con respecto a un sistema de referencia inercial S. Los ejes de coordenadas de ambos sistemas son paralelos entre sí. ¿Cuál es la separación espacial de estos dos eventos en el sistema de referencia S?

Las coordenadas temporales de estos dos eventos en el sistema S son

$$t_1 = \frac{t_1{}'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad t_2 = \frac{t_2{}'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{34}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{(t_2{}' - t_1{}')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{35}$$

La separación espacial entre ambos es entonces:

$$x_2 - x_1 = -v(t_2 - t_1) \tag{36}$$

1.4 Transformación de Velocidades

La velocidad con que se desplaza una partícula en un cierto sistema de referencia S puede expresarse en término de sus coordenadas cartesianas:

$$u_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{37}$$

La velocidad que calculan los observadores de un sistema $S^{'}$ – que se desplaza con velocidad v con respecto a S, en la dirección $+x$ es

$$u_x^{'} = \frac{x_2^{'} - x_1^{'}}{t_2^{'} - t_1^{'}} = \frac{\Delta x^{'}}{\Delta t^{'}} \tag{38}$$

Utilizando las transformaciones de Lorentz podemos escribir de immediato que:

$$u_x^{'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - v\Delta x/c^2} \tag{39}$$

Dividiendo numerador y denominador por Δt

$$u_x^{'} = \frac{u_x - v}{1 - (vu_x)/c^2} \tag{40}$$

En forma análoga se deduce que

$$u_y^{'} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)} \tag{41}$$

$$u_z^{'} = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)} \tag{42}$$

EJEMPLO

Consideremos un rayo de luz que viaja paralelo al eje x en el sistema de referencia S. Entonces, su velocidad se puede escribir como: $\vec{v} = (c, 0, 0)$. Utilizando las ecuaciones para transformar velocidades encontramos que

$$u_x^{'} = \frac{c - v}{1 - v/c} = c \qquad u_y^{'} = 0 \qquad u_z^{'} = 0 \tag{43}$$

Note que este ejemplo comprueba que efectivamente la velocidad de la luz tiene el mismo valor en los sistemas S y $S^{'}$. **EJEMPLO**

Un avión supersónico se mueve a 1000 m/s (aproximadamente 3 Machs) en la dirección $+x$ relativo a Ud. Otro avión se mueve paralelo al eje x a 500 m/s relativo al primer avión. ¿ Cuán rápido se mueve el segundo avión relativo a Ud.?

Sea S el sistema de referencia donde Ud. se encuentra y $S^{'}$ el sistema de referencia solidario al primer avión. Es decir, $S^{'}$ se mueve con respecto a S con velocidad $V = 1000$ m/s. En $S^{'}$ el segundo avión se mueve a $u_x{'} = 500$ m/s. Entonces, la velocidad del segundo avión en S es:

$$u_x = \frac{u_x{'} + V}{1 + Vu_x{'}/c^2} \tag{44}$$

La cantidad que hace la diferencia con el resultado no relativista aparece en el denominador; i.e.

$$\frac{V {u_x}'}{c^2} = \frac{10^3 \times 500}{3 \times 10^8} \approx 5 \times 10^{-12} \tag{45}$$

Claramente, para estas velocidades la corrección relativista no tiene ninguna importancia. Sin embargo, si en lugar de aviones se trata de partículas que se mueven con $V = 0.8c$ relativa a Ud. y otra con velocidad ${u_x}' = 0.8c$ relativa a la primera partícula, el término de corrección es importante. Explícitamente:

$$u_x = \frac{0.8c + 0.8c}{1 + (0.8)^2/c^2} = 0.98c \tag{46}$$

1.5 Efecto Doppler

Consideremos una fuente de luz que emite radiación de frecuencia ν_0 en el sistema de referencia propio (S'). Cuando la fuente se acerca con velocidad V a un observador estacionario en el sistema de laboratorio (S), éste mide que la radiación tiene una frecuencia diferente ν.

Durante el lapso de tiempo Δt medido en el sistema de referencia del laboratorio, la fuente emite N oscilaciones completas, que están contenidas en la región entre el observador y la posición actual de la fuente. Es decir, en una zona de largo $c\ \Delta t - V\ \Delta t$. Por lo tanto, la longitud de onda de la radiación en el sistema de referencia S es

$$\lambda = \frac{(c - V)\ \Delta t}{N} \tag{47}$$

Sabemos también que, $\lambda\ \nu = c$, luego:

$$\nu = \frac{N}{(1 - V/c)\Delta t} \tag{48}$$

Pero, el tiempo trancurrido $\Delta t'$ en el sistema de referencia donde la fuente está en reposo, está relacionado con Δt a través de la expresión

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{49}$$

reemplazando este resultado en la expresión para ν

$$\nu = \frac{cN\sqrt{1 - V^2/c^2}}{(c - V)\Delta t'} \tag{50}$$

La frecuencia propia de la fuente es $\nu_0 = \Delta t'/N$. Usando este resultado obtenemos la expresión final

$$\nu = \frac{\sqrt{1 + V/c}}{\sqrt{1 - V/c}}\nu_0 \tag{51}$$

El valor de la frecuencia cuando la fuente se aleja del observador, se obtiene fácilmente cambiando V en $-V$ en la expresión obtenida.

Note que la expresión obtenida sólo depende de la velocidad relativa entre el observador y la fuente, y de la velocidad de la luz, que es una constante universal.

1.6 Intervalo entre dos eventos

Consideremos dos eventos cualesquiera, 1 y 2. En el sistema de referencia del laboratorio ellos tienen coordenadas $(c\ t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $(c\ t_2, x_2, y_2, z_2)$. **Definición**. Intervalo s_{12} entre los eventos 1 y 2:

$$s_{12}{}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{52}$$

$$s_{12}{}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{53}$$

Probaremos que esta magnitud es invariante bajo transformaciones de Lorentz; i.e. , tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. Sea S' un sistema de referencia que se mueve con velocidad V con respecto al sistema de laboratorio S. Entonces

$$s_{12}{}^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \tag{54}$$

Utilizando las transformaciones de Lorentz podemos escribir que

$$s_{12}{}^2 = c^2\gamma^2 \left[\Delta t - V\Delta x/c^2\right]^2 - \gamma^2\left[\Delta x - V\Delta t\right]^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{55}$$

donde

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{56}$$

Desarrollando explícitamente los cuadrados del binomio se comprueba que los términos cruzados de cada paréntesis cuadrado se cancelan mutuamente. La expresión resultante se reduce a

$$s_{12}{}^2 = \frac{(\Delta t)^2 c^2(1 - V^2/c^2) - (\Delta x)^2(1 - V^2/c^2)}{1 - V^2/c^2} - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{57}$$

Simplificando los factores $(1 - V^2/c^2)$ se verifica que el intervalos entre los eventos 1 y 2 tiene el mismo valor en los sistemas S y S'. En efecto,

$$s_{12}{}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{58}$$

Causalidad

Decimos que existe una relación causa efecto entre dos eventos dados 1 y 2 cuando es posible que uno de ellos haya producido (causado) al otro.

Esta situación ocurre cuando la separación temporal entre el evento *causa* y el evento *efecto* es tal que $c^2(\Delta t)^2 \geq (\Delta\vec{r})^2$. En otras palabras, cuando existe en principio una señal que generada por el evento *causa* llegará oportunamente con la información a la posición del evento *efecto* para producirlo. Si esta condición no se satisface, no puede existir una relación causa efecto entre esos eventos. **Clasificación de los Intervalos** La propiedad del intervalo de ser invariante bajo transformaciones de Lorentz permite clasificar los intervalos en forma absoluta, de acuerdo a su valor.

a) Intervalo tipo tiempo. En este caso se cumple que

$$ {s_{12}}^2 \geq 0 \qquad o \qquad c^2(\Delta t)^2 \geq (\Delta\vec{r})^2 \tag{59} $$

Entre estos eventos puede existir una relación causa-efecto producida por una señal que viaja con velocidad $c_1 \leq c$ tal que ${c_1}^2(\Delta t)^2 = (\Delta\vec{r})^2$.

b) Intervalo tipo luz.

$$ {s_{12}}^2 = 0 \qquad o \qquad c^2(\Delta t)^2 = (\Delta\vec{r})^2 \tag{60} $$

Para que exista una relación causa-efecto entre este tipo de eventos es necesario que la señal que los conecta sea una señal que viaja con la velocidad de la luz en el espacio vacío.

c) Intervalo tipo espacio.

$$ {s_{12}}^2 < 0 \qquad o \qquad c^2(\Delta t)^2 < (\Delta\vec{r})^2 \tag{61} $$

En este caso no puede existir una relación causa-efecto entre los eventos pues se requeriría una señal que viajara a velocidades mayores que la velocidad de la luz en el espacio vacío.

Línea de Universo de una partícula.

La trayectoria que describe una partícula en un diagrama ct versus r, se llama línea de Universo de la partícula. Cuando el movimiento está restringido a una o dos dimensiones, resulta posible graficar dicha trayectoria.

La figura ilustra la línea de universo de una partícula que parte desde del origen de coordenadas en $t = 0$ (punto A). Allí aparece dibujado un cono con vértice en un evento dado. En este caso, el origen de coordenadas

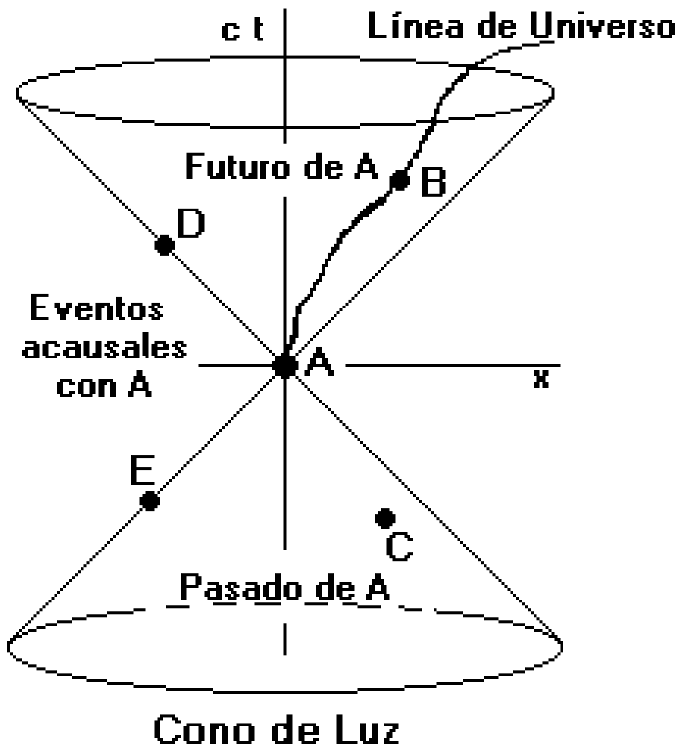

Figura 1: Cono de luz

ha sido elegido de manera que la partícula se encuentra en $x = 0$ al tiempo $t = 0$. Todos los eventos que están contenidos en el cono abierto hacia arriba, forman parte del futuro de A y todos aquellos en el interior del cono abierto hacia abajo pertenecen al pasado de A.

El evento B pertenece al futuro de B. Eso significa que una señal enviada por A en $t = 0$ *podría* influenciar lo que ocurrirá en B.

El evento C pertenece al pasado de A. Eso significa que lo que ocurrió en C podría haber tenido influencia en el evento A.

Los eventos ubicados sobre el manto del cono (eventos D y E) sólo pueden estar conectados causalmente con A mediante una señal que viaje con la velocidad de la luz (eventos tipo luz).

Eventos fuera de los conos no pueden influenciar nada que ocurra dentro de los conos y viceversa.

Note que en ningún instante la recta tangente a una línea de universo puede ser menor que 1, pues eso significaría que en ese punto la velocidad de la partícula excedería el valor de la velocidad de la luz en el vacío. **Futuro y Pasado de un evento**

Un resultado interesante es que los conceptos de *futuro* y *pasado* son absolutos para eventos entre los cuales existe una relación causa-efecto (i.e., para intervalos tipo tiempo o tipo luz). En este caso, si un evento A ocurre antes que B en un cierto sistema de referencia, entonces A ocurre antes que B en cualquier sistema de referencia inercial que se mueve con velocidad uniforme con respecto al primero.

Sean (x_A, t_A) y (x_B, t_B) las coordenadas de estos eventos en el sistema de referencia inercial S. Para ser específicos, supongamos que $t_B > t_A$. Utilizando las transformaciones de Lorentz tenemos que

$$t'_B - t'_A = \left[(t_B - t_A) - V/c^2(x_B - x_A)\right]\gamma \tag{62}$$

$$t'_B - t'_A = (t_B - t_A)\gamma\left[1 - \frac{V}{c}\frac{(x_B - x_A)}{c(t_B - t_A)}\right] \tag{63}$$

La expresión dentro del paréntesis cuadrado es siempre positiva pues $V/c < 1$ y $|(x_B - x_A)/c(t_B - t_A)| \leq 1$ (se trata de eventos tipo tiempo o tipo luz). En consecuencia, $t'_B > t'_A$. En otras palabras, la relación causa-efecto entre dos eventos no es alterada por las transformaciones de Lorentz.

Utilizando el mismo tratamiento, se puede demostrar que el ordenamiento temporal de eventos *tipo espacio*, no es preservado por las transformaciones de Lorentz.

1.7 Momentum y Energía relativistas

Consideremos dos posiciones vecinas en la trayectoria de una partícula, separadas por un intervalo de tiempo Δt en un sistema de referencia S (Sistema de laboratorio). El intervalo entre estos dos eventos vecinos es

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 = c^2\Delta\tau^2 \tag{64}$$

donde $\Delta\tau$ es el tiempo propio de la partícula. Por otra parte sabemos que

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{65}$$

donde v es la magnitud de la velocidad de la partícula en el sistema de referencia del laboratorio.

Dividiendo Δs^2 por $\Delta\tau^2$, y multiplicando el resultado por el cuadrado de la masa en reposo de la partícula (m_0), se obtiene

$$\frac{{m_0}^2 c^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{{m_0}^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = {m_0}^2 c^2 \tag{66}$$

Note que esta expresión ha sido construída multiplicando y dividiendo cantidades que son invariantes bajo transformaciones de Lorentz; i.e s^2, ${m_0}^2$ y $\Delta\tau^2$. Consecuentemente, debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz.

DEFINICION. Energía relativista de una partícula de masa m_0

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{67}$$

DEFINICION. Momentum Lineal relativista de una partícula de masa m_0

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{68}$$

Reemplazando estas definiciones en la expresión invariante escrita más arriba, se obtiene

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = {m_0}^2 c^2 \tag{69}$$

o

$$E^2 = c^2 p^2 + {m_0}^2 c^4 \tag{70}$$

E y $\vec{p}$ son cantidades que dependen del sistema de referencia en que son evaluadas; sin embargo, note que $E^2 - p^2$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Un resultado muy interesante resulta de aplicar la expresión recién deducida a una partícula cuya masa en reposo es nula (por ejemplo, un fotón o un neutrino). Dado que m_0 es nulo, el momentum lineal queda definido en función de la energía de acuerdo a la expresión

$$p = \frac{E}{c} \tag{71}$$

Vemos que el momentum lineal de una partícula de masa nula es distinto de cero.

También conviene notar que la energía de una partícula de masa m_0 en reposo (sistema de referencia propio), no es cero, sino m_0c^2.

Definición Energía Cinética de una partícula de masa m_0

La energía cinética relativista de una partícula de masa en reposo m_0 se define como la diferencia entre la energía de la partícula en movimiento, menos la energía que posee cuando está en reposo.

$$K = E - m_0c^2 = m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1) \tag{72}$$

Note que cuando $v/c << 1$ (límite no relativista), esta expresión tiende al valor conocido de mecánica Newtoniana

$$K = m_0c^2(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + ... - 1) = \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{73}$$

EJERCICIO

Considere un choque frontal perfectamente inelástico de dos partículas de masas m_{10} y m_{20} que se mueven con velocidades u_1 y u_2 en el sistema de referencia del laboratorio.

Supondremos que las leyes de conservación de energía y momentum lineal, deducidas en mecánica no relativista, siguen siendo válidas, pero las definiciones para estas cantidades son las que se han dado en esta sección.

Después del choque ambas partículas quedan adheridas y continúan juntas con velocidad u. Sea M_0 la masa en reposo del sistema formado por las dos partículas adheridas. Utilizando el principio de conservación de la energía,

$$E_i = E_1 + E_2 = E_f \tag{74}$$

$$K_i = K_1 + K_2 = (E_1 - m_{10}c^2) + (E_2 - m_{20}c^2) \tag{75}$$

$$K_i - K_f = (E_1 + E_2 - m_{10}c^2 - m_{20}c^2) - (E_f - M_0c^2) \tag{76}$$

$$K_i - K_f = (m_{10} + m_{20} - M_0)c^2 = \Delta m_0c^2 \tag{77}$$

La masa en reposo del sistema después del choque no es igual a la suma de las masas de las partículas originales.

En relatividad es común expresar la masa de las partículas en unidades de energía, ya que en el sistema de referencia donde la partícula está en reposo existe una relación directa entre ambas cantidades

$$E = m_0 c^2 \tag{78}$$

Dado que los valores de la masa de las partículas elementales son muy pequeños cuando se expresan en unidades convencionales como *ergs* o *joules*, es conveniente introducir una unidad de energía más pequeña

$$1\ eV \equiv 1 \quad electron - Volt = 1.6 \times 10^{-19}\ J \tag{79}$$

$$1MeV = 10^6 eV \tag{80}$$

EJEMPLO

Un deuterón es un núcleo formado por un protón y un neutrón unidos entre sí por fuerzas nucleares. La masa del deuterón es $m_d = 1875.628\ MeV$, la masa del protón es $m_p = 938.280\ MeV$ y la masa del neutrón es $m_n = 939.573\ MeV$. ¿ Cuál es la energía mínima que se requiere para separar al protón del neutrón en un deuterón?

La energía en reposo del protón más el neutrón libres es : $938.280 + 939.573 = 1877.85\ MeV$. La diferencia entre esta energía y la energía en reposo del deuterón es la cantidad mínima que se requiere para separarlos. Es decir:

$$\Delta m_0 c^2 = 1877.85 - 1875.628\ Mev = 2.22\ MeV \tag{81}$$

Esta energía se denomina energía de ligazón del deuterón y es la mínima energía que se necesita entregar para *fisionar* un deuterón.

El proceso inverso *fusión*, consiste en formar un deuterón a partir de un protón y un neutrón libres. El balance de energía recién escrito muestra que el proceso de fusión *libera* $2.2MeV$ por cada deterón formado. Note que el proceso libera energía pues la masa de deuterón es menor que la suma de las masas del protón y el neutrón.

1.8 Transformaciones Energía – Momentum

Centremos nuestra atención en un partícula de masa m_0 que se mueve con velocidad $\vec{u}$ con respecto a un cierto sistema de referencia inercial. En un instante dado t la partícula se encuentra en el punto P de coordenadas (x, y, z).

Transcurridos Δt segundos, la partícula se encuentra en una nueva posición $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Se puede demostrar que el conjunto de coordenadas $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ define un vector en un espacio de cuatro dimensiones (Cuadrivector) cuya métrica es tal que el intervalo es una magnitud invariante bajo transformaciones de Lorentz. En base a este cuadrivector, definiremos otro cuadrivector llamado Energía -Momentum, de la siguiente manera: Sea Δs el intervalo de tiempo entre dos posiciones sucesivas en la trayectoria de la partícula de masa m_0, entonces

$$\Delta s = (c\Delta t, \Delta\vec{r}) \tag{82}$$

multiplicando cada componente de este cuadrivector por m_0 y dividiendo por el tiempo propio de la partícula $\Delta\tau$,

$$\frac{m_0\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{m_0}{\Delta\tau}(c\Delta t, \Delta\vec{r}) \tag{83}$$

Recordemos que

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{84}$$

Reemplazando este resultado en la expresión anterior y definiendo la primera componente como E/c y las componentes que siguen como p_x, p_y, p_z, se tiene que

$$(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{u_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{u_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}) \equiv (E/c, p_x, p_y, p_z) \tag{85}$$

Ecuaciones de transformación Energía Momentum

Comparando el cuadrivector espacio-tiempo con el cuadrivector momentum-energía vemos que E/c transforma bajo transformaciones de Lorentz de la misma manera que ct, en tanto que p_x, p_y, p_z transforman como x, y, z. Específicamente, consideremos un sistema de referencia S' que se mueve con velocidad relativa V con respecto al sistema de laboratorio S, en la dirección $+x$. Entonces,

$$ct' = \gamma(ct - Vx/c) \quad \textit{luego} \quad E'/c = \gamma(E/c - Vp_x/c) \tag{86}$$

es decir:

$$E' = \gamma(E - Vp_x) \tag{87}$$

De la misma manera, las componentes espaciales transforman como

$$x' = \gamma(x - Vt) \tag{88}$$

luego,

$$p'_x = \gamma(p_x - VE/c^2) \tag{89}$$

$$p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \tag{90}$$

2 EJERCICIOS

1. La vida media propia de los mesones pi (piones) es 2.6×10^{-8} s. En un haz de mesones pi éstos alcanzan una velocidad de 0.85 c, (a)¿Cuál es el valor de la vida media de un mesón pi medida en el sistema de laboratorio? (b)¿ Cuán lejos alcanzan a viajar antes de desintegrarse? (c) ¿Cuál hubiera sido la respuesta para la parte (b) si se hubiera despreciado la dilatación del tiempo?

2. Una nave espacial de longitud propia 100 m pasa frente a Ud. a alta velocidad. Ud. mide que la longitud de la nave es 85 m. ¿ Cuál es la velocidad de la nave?

3. Una nave espacial parte desde la tierra con rumbo a la estrella *Alpha Centauro*, que de acuerdo a mediciones hechas en la tierra está a cuatro años luz. La nave espacial viaja a 0.75 c. (a) ¿Cuánto tarda en llegar a la estrella de acuerdo a observadores asociados al sistema inercial solidario con la tierra.(b) ¿ Cuánto dura el viaje para un pasajero de la nave espacial?

4. La máxima velocidad que alcanza un avión supersónico es aproximadamente $(3 \times 10^{-6})c$ (a) ¿Cuánto vale la razón $(l - l_0)/l_0$ (l_0 es la longitud propia del avión). (b) ¿Podría apreciarse el efecto de dilatación del tiempo al comparar la lectura de los relojes del piloto y observadores en tierra cuando ha pasado una hora en la tierra?

5. Considere dos sistemas de referencia inerciales S y S' que se desplazan con sus ejes de coordenadas mutuamente paralelos. El sistema S' se mueve son velocidad $0.6c$ en la dirección del eje x. Una linterna en reposo en S' envía un flash luminoso en todas las direcciones de manera que éste alcanza simultáneamente los puntos $({x_1}' = -50c\ min., {y_1}' = 1\ m, {z_1}' = 2\ m)$ y $({x_2}' = 50c\ min., {y_2}' = 1\ m, {z_2}' = 2\ m)$ en $t' = 0$. Un observador C en S colocado en la misma posición en que se encuentra la linterna coloca su reloj

en cero al momento en que sale el flash de luz.Todos los relojes de S son sincronizados con respecto a este reloj. (a) Cuál es el tiempo que separa a los eventos 1 y 2 para el observador del sistema S (b) Demuestre que el reloj de S marca 25 min cuando el flash de luz llega al punto 1 y marca 100 min cuando llega al punto 2.

6. (Efecto Doppler). Una galaxia distante se aleja de nosotros a una velocidad de $1.85 \times 10^7\ m/s$. Calcule el corrimiento fraccional hacia el rojo de la luz que emite esa galaxia; i.e. $(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$.

7. (Paradoja de los mellizos) Una amiga suya que tiene la misma edad que Ud., viaja a 0.999 c hacia una estrella ubicada a 15 años luz de la tierra. Allí permanece 10 años para luego regresar a la tierra a 0.999 c ¿ Cuánto tiempo ha durado el viaje? (a) De acuerdo a lo que Ud. mide (b) De acuerdo a lo que ella mide.

8. Un cohete cuya longitud propia es 1000 m se mueve en la dirección $+x$ a 0.6 c con respecto a un observador en tierra. Un astronauta ubicado en el extremo posterior del cohete dispara un proyectil hacia la parte delantera del cohete con velocidad 0.8 c relativa al cohete. ¿ Cuánto tarda el proyectil en alcanzar la parte delantera del cohete? (a) Medido en el sistema de referencia del cohete (b) Medido por un observador en tierra (c) Medido en el sistema de referencia donde el proyectil está en reposo.

9. Un cohete de longitud propia 700 m se mueve hacia la derecha con velocidad 0.9 c. Tiene adosados un reloj en la cola y otro en la proa. Ambos relojes están sincronizados correctamente en el sistema de referencia del cohete. El reloj de la proa y un reloj asociado el sistema de referencia del laboratorio (reloj A fijo en una cierta posición en tierra) leen $t = 0$ cuando ellos se cruzan. (a) En $t = 0$ ¿ cuál es el tiempo que marca el reloj del cohete ubicado en la cola de éste de acuerdo a un observador en tierra? (b) Cuánto marca el reloj estacionario en el sistema de referencia de la tierra cuando el reloj de la cola del cohete pasa por la posición del reloj A.

10. Una barra rígida de longitud propia L_0 forma un ángulo θ en el sistema de referencia S donde se encuentra en reposo. Demuestre que el ángulo θ' que forma con el eje x' del sistema de referencia S' –que se desplaza con velocidad V en al dirección $+x$ – está dado por la expresión $tan\theta' = \gamma tan\theta$ mientras que su longitud es

$$L' = L_0[\gamma^{-2}cos^2\theta + sen^2\theta]^{1/2} \tag{91}$$

11. Demuestre que si una partícula se mueve con velocidad $\vec{u}$ en el sistema

de referencia S formando un ángulo θ con el eje x, entonces en S', se mueve formando un ángulo θ' con el eje x' dado por

$$tan\theta' = \frac{sen\ \theta}{\gamma(cos\theta - V/u)} \tag{92}$$

donde V es la velocidad relativa de S' con respecto a S.

12. Una regla orientada paralelamente al eje x en un sistema de referencia S se mueve con velocidad $\vec{v} = (0, u_y, 0)$. Observadores de un sistema de referencia S' que se mueve con velocidad V con respecto a S en la dirección $+x$, determinan que la regla se está inclinada formando un ángulo ϕ' con el eje x'. Explique porqué esto es así. Suponga que el centro de la regla pasa por el punto $(x' = y' = z' = 0$ al tiempo $t = t' = 0$, tal como se muestra en la figura.

Note que la parte delantera de la regla en S' tiene una coordenada y' mayor que su extremo posterior. Responda en orden las siguientes preguntas: (a) ¿Cuándo y dónde el extremo derecho de la regla cruza el eje x en el sistema de referencia del *laboratorio*? (b) ¿Cuándo y dónde ocurre este mismo cruce observado desde el sistema S'. ¿Cuál es la velocidad de la regla en el sistema de referencia S'.

13. Cierta leyenda dice que un niño dotado de una buena dósis de curiosidad científica se preocupaba del siguiente problema: Un corredor se mira en un espejo que sostiene frente a él con los brazos estirados. Si la velocidad del corredor con respecto al suelo es cercana a la velocidad de la luz, ¿ se verá el corredor en el espejo? Analice la situación desde el punto de vista de relatividad especial.

14. Paradoja de la Garrocha y el Granero. Un estudiante escribe muy preocupado las siguientes líneas: "La teoría de la relatividad está equivocada. Considere una garrocha de 20 m orientada paralelamente al suelo mientras es transportada por un corredor que se desplaza a alta velocidad con respecto a la tierra. En esas condiciones la longitud de la barra medida por observadores de la tierra aparece contraída a 10 m.

Por lo tanto, en un cierto instante la garrocha puede estar completamente contenida dentro de un granero de 10 m de largo (ver figura). Ahora, analicemos la misma situación del punto de vista del corredor. Para él el granero aparece contraído a la mitad de su largo propio. ¿Cómo puede entonces una garrocha de 20 m estar contenida dentro de un granero de 5 m de largo?

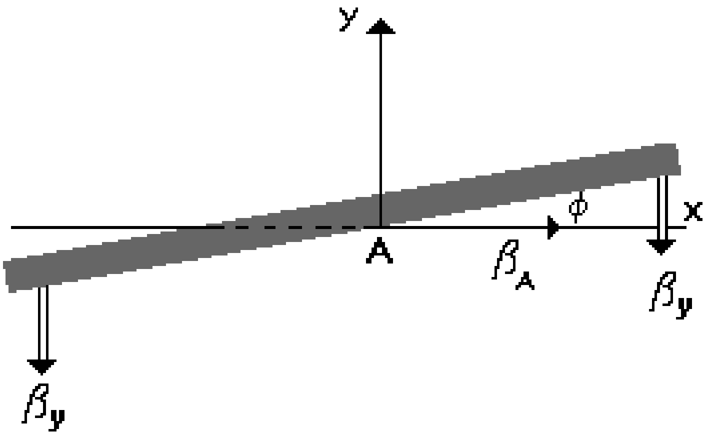

Figura 2: Barra inclinada en movimiento

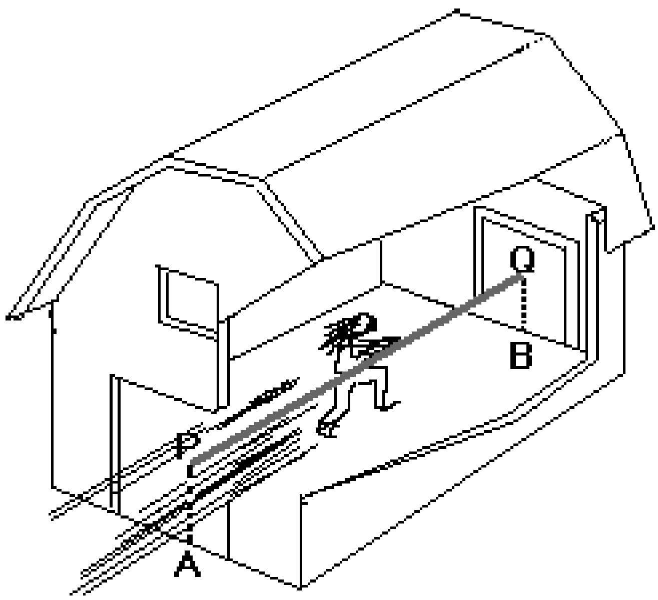

Figura 3: Paradoja de la garrocha y el granero

Claramente este hecho demuestra que la teoría de la relatividad contiene inconsistencias lógicas en sus fundamentos".

Escriba una respuesta a este estudiante explicando en forma clara y cuidadosa como la garrocha y el granero son tratados por la relatividad sin que existan contradicciones.

NOTA. La clave está en analizar la simultaneidad de los siguientes eventos :La punta de la garrocha coincide con la salida del granero y el extremo posterior de la garrocha coincide con la entrada del granero. En un cierto sistema de referencia estos cuatro eventos son simultáneos pero no lo son en otros sistemas de referencia inerciales.

2.1 BIBLIOGRAFIA

1. A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegte Korper ", Ann. Phys. (Leipzig) 17, 132 (1905). 2. H.M.Schartz, "Einstein first paper on relativity ", Am.J. of Physics, 45, 18-25 (1977) 3. Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler, "Spacetime Physics ", W. H. Freeman and Company, (1966).