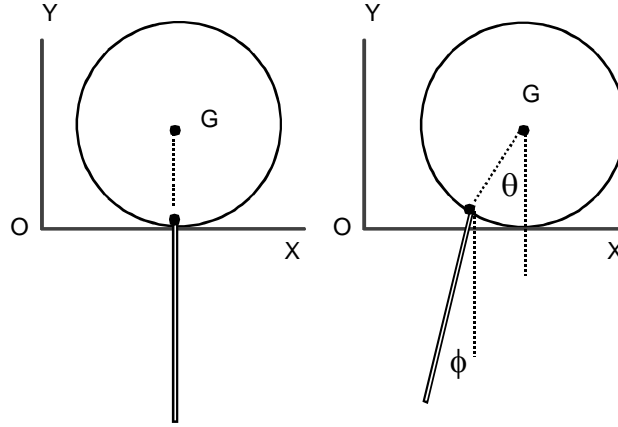


PAUTA CONTROL 3

Un punto base en cada problema, más lo indicado por partes si está correcta. Si hay errores el corrector juzga cuanto descontarle. Las notas entonces van de 1.0 a 7.0 en cada problema.

Problema 1 Un disco puede de masa M y radio R puede rodar sin resbalar sobre un plano horizontal. Una barra de masa igual M y longitud $2R$ está articulada a un punto de su borde y cuelga verticalmente en la posición de equilibrio indicada en la primera

figura. Para oscilaciones pequeñas en θ, ϕ
a. Escriba el Lagrangiano aproximado.



- b. Escriba las ecuaciones de movimiento.
c. Determine las frecuencias propias de oscilación.
d. Determine las coordenadas normales en términos de θ, ϕ . Los momentos de Inercia del disco y barra respecto a su centro son

Solución: Las coordenadas del centro de masas de la barra y sus derivadas son

$$\begin{aligned} x_G &= R\theta - R\sin\theta - R\sin\phi, \quad \dot{x}_G = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\phi}\cos\phi \\ y_G &= -R\cos\theta - R\cos\phi, \quad \dot{y}_G = R\dot{\theta}\sin\theta + R\dot{\phi}\sin\phi \end{aligned}$$

El Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2\right)\dot{\phi}^2 + Mg(R\cos\theta + R\cos\phi)$$

haciendo las aproximaciones correspondientes

$$\begin{aligned} \dot{y}_G^2 &= (R\dot{\theta}\sin\theta + R\dot{\phi}\sin\phi)^2 \simeq 0 \\ \dot{x}_G^2 &= (R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\phi}\cos\phi)^2 \simeq R^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &\simeq \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2\right)\dot{\phi}^2 \\
&\quad + Mg\left(-\frac{1}{2}R\theta^2 - \frac{1}{2}R\phi^2\right) \\
&= \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}MR^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}MgR\theta^2 - \frac{1}{2}MgR\phi^2 \quad (\text{a) 1 p})
\end{aligned}$$

ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{4}{3}MR^2\dot{\phi}$$

de aquí

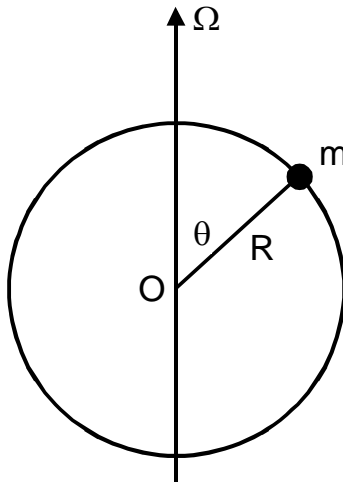
$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta &= 0 \\
\frac{4}{3}\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\phi &= 0 \quad (\text{b) 1 p})
\end{aligned}$$

no resulta necesario trabajar más. Las coordenadas elegidas θ, ϕ son las normales por no haber acoplamiento...

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{4R}} \quad (\text{c) 2 p})$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \theta \\
\xi_2 &= \phi \quad (\text{d) 2 p})
\end{aligned}$$

Problema 2. Una partícula de masa m puede deslizar sin roce por un anillo de radio R . El anillo se hace girar en torno a su diámetro vertical con velocidad angular constante Ω . Para la coordenada θ generalizada escriba:



- La ecuación de movimiento.
- El Hamiltoniano.
- Las ecuaciones de Hamilton.
- Las cantidades conservadas si las hay.
- ¿Existe un ángulo que podría permanecer constante?

Solución:

El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\Omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta$$

de aquí sigue la ecuación de movimiento haciendo

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mR^2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta \end{aligned}$$

θ

$$\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta = 0 \quad (\text{a) 1 p})$$

El Hamiltoniano debe calcularse porque no es la energía

$$\begin{aligned} H &= p_\theta \dot{\theta} - L & (\text{b) }) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta & (1 \text{ p}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta & (1 \text{ p}) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Hamilton serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta} &= -mR^2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta = \dot{p}_\theta \\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta} &= \frac{p_\theta}{mR^2} = \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{c) 1 p})$$

Cantidad conservada por ser $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

$$H = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta = \text{constante} \quad (\text{d) 1 p})$$

En la ecuación de movimiento haga $\ddot{\theta} = 0$

$$\begin{aligned} \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \sin \theta &= 0 \Rightarrow \\ \theta_1 &= 0, \quad \theta_2 = \pi & (\text{e) 1 p}) \\ \cos \theta_3 &= -\frac{g}{R\Omega^2} \text{ requiere que } \frac{g}{R\Omega^2} < 1 \end{aligned}$$

Problema 3

Tenemos

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x) = 0, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} &= V(x) = 5 \sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{3\pi x}{L} \end{aligned}$$

es de antemano antisimétrica y de periodo $2L$, luego trivialmente D'Alembert

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \left(5 \sin \frac{\pi u}{L} + \sin \frac{3\pi u}{L} \right) du \\ &= \frac{L}{2\pi v} \left(5 \left(\cos \frac{\pi(x-vt)}{L} - \cos \frac{\pi(x+vt)}{L} \right) + \frac{1}{3} \left(\cos \frac{3\pi(x-vt)}{L} - \cos \frac{3\pi(x+vt)}{L} \right) \right) \\ &= \frac{5L}{\pi v} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi vt}{L} + \frac{L}{3\pi v} \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{3\pi vt}{L} \end{aligned} \quad (6 \text{ p})$$

Bernoulli

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + B_n \sin \frac{n\pi vt}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ F &= 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow A_n = 0 \\ V &= 5 \sin \frac{\pi x}{L} + \sin \frac{3\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi v}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \\ B_1 &= \frac{5L}{\pi v}, \quad B_3 = \frac{L}{3\pi v} \quad \text{otros nulos...} \end{aligned}$$

luego se obtiene lo mismo...

$$\begin{aligned} y(x, t) &= B_1 \sin \frac{\pi vt}{L} \sin \frac{\pi x}{L} + B_3 \sin \frac{3\pi vt}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} \\ &= \frac{5L}{\pi v} \sin \frac{\pi vt}{L} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{L}{3\pi v} \sin \frac{3\pi vt}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} \end{aligned} \quad (6 \text{ p})$$