Un punto base en cada problema, más lo indicado por partes si está correcta. Si hay errores el corrector juzga cuanto descontarle. Las notas entonces van de 1.0 a 7.0 en cada problema.

Problema 1

Calculamos las constantes con $\theta(0) = \frac{\pi}{3}, \dot\theta(0) = 0, \dot\phi(0) = 0, C = mh^2$, $A = 2mh^2$, $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$, $s = 3\sqrt{\frac{g}{h}}$

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot\phi^2 \sin^2\theta + A\dot\theta^2 + 2mgh\cos\theta = 2mgh\cos\frac{\pi}{3} = mgh \\ \alpha &= A\dot\phi\sin^2\theta + Cs\cos\theta = Cs\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}Cs \end{aligned}$$

luego $f(u)$ será

$$\begin{aligned} \dot u^2 &= f(u) = \left(2E - Cs^2 - 2mghu\right)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu}{A}\right)^2, \\ &= (mgh - 2mghu)\frac{1-u^2}{A} - \left(\frac{\frac{1}{2}Cs - Csu}{A}\right)^2 = \\ &= \frac{g}{16h}(-1+2u)(1+8u^2-18u) = \end{aligned}$$

se obtienen como raíces

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pi/3 = 60^o & \text{(a) 4 p)} \\ u_2 &= \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{73} = 5.69995 \times 10^{-2} \Rightarrow \theta_2 = 86.732^o \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \dot\phi &= \frac{\frac{1}{2}Cs - Cs\cos\theta}{A\sin^2\theta} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{1-2\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{1-2u}{1-u^2} \\ u &= \frac{1}{2}, \dot\phi = 0 \\ u &= \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{73}, \quad \dot\phi_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{h}} & \text{(b) 2 p)} \end{aligned}$$

Problema 2.

Las matrices de rotación construidas para $\phi = \pi/2$ resultan

$$\begin{aligned} R_{\hat n} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} -n_y^2 - n_z^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & -n_x^2 - n_z^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & -n_x^2 - n_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para los ejes

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

:

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) la rotación equivalente será

$$R = R_x R_z R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde la traza es

$$Tr(R) = 1 = 1 + 2\cos\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

además

$$\begin{aligned} R - R^T &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \\ n_x &= 0, n_y = 0, n_x = 1, \quad \hat{n} = (1,0,0) = \hat{\imath} \qquad \text{(a) 3 p)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R &= R_x R_y R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Tr(R) &= -1 = 1 + 2\cos\phi \Rightarrow \phi = \pi, \end{aligned}$$

hay que ir directamente a

$$\begin{aligned} R &= I + 2\sin\phi(\hat{n}\times) + (1-\cos\phi)(\hat{n}\times)^2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -n_y^2 - n_z^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & -n_x^2 - n_z^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & -n_x^2 - n_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde se identifica

$$\begin{aligned} n_x n_y &= 0 \\ n_x n_z &= \frac{1}{2} \\ n_y n_z &= 0 \\ n_y^2 + n_z^2 &= \frac{1}{2} \\ n_x^2 + n_z^2 &= 1 \\ n_x^2 + n_y^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$n_y = 0, n_x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, n_z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(b) 3 p)}$$

Problema 3

Por conservación de energía o por otro método, incluido Lagrange si alguien así lo hizo. Las coordenadas del centro de masa son

$$\begin{aligned} & x_G \\ y_G &= R - h\cos\theta \\ & \dot{x}_G \\ \dot{y}_G &= h\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Como $v_x(0)$=constante su valor no influye

$$E = \frac{1}{2}M(v_x(0)^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgh\cos\theta = \frac{1}{2}Mv_x(0)^2 + \frac{1}{2}I_G\Omega^2 - Mgh$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}M(h^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{2}I_G\Omega^2 + Mgh\cos\theta - Mgh \\
\dot{\theta}^2 &= \frac{I_G\Omega^2 - 2Mgh(1-\cos\theta)}{M(h^2\sin^2\theta) + I_G} \qquad \text{(4 p)}
\end{aligned}$$

$$I_G\Omega^2 = 2Mgh(1-\cos\theta)$$

de donde

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\frac{I_G\Omega^2}{Mgh} > 0$$

hay solución si

$$\Omega < \sqrt{\frac{2Mgh}{I_G}} \qquad \text{(2 p)}$$