

# Pauta Control 1, 2006

Cada problema tiene (1) punto base más (6) puntos por sus partes que aquí se indican. En cada parte se ha especificado su valor si está correcta. Si está incorrecta el corrector juzga su valor entre 0 y el máximo dependiendo del tipo de error.

1. Problema (1). Tenemos

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1+e} \\ R_2 &= \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1-e} \end{aligned}$$

divida y despeje  $e$

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow e = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \quad (\text{a) 1.5 p})$$

ahora despejamos  $l_0$  de cualquiera de las dos primeras

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{\mu k} \sqrt{R_1(1+e)} \\ &= \sqrt{\frac{mM}{m+M} GmM} \sqrt{R_1(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1})} \\ &= mM \sqrt{\frac{G}{M+m}} \sqrt{\frac{2R_1 R_2}{R_2 + R_1}} \quad (\text{b) 1.5 p}) \end{aligned}$$

la energía: la despejamos de

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{\mu k^2} \\ E &= \frac{1}{2} \mu k^2 \frac{e^2 - 1}{l_0^2} \end{aligned}$$

puede reemplazarse  $e$ ,  $l_0$  pero es preferible darse cuenta de las dos primeras que

$$R_1 + R_2 = \frac{2l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1-e^2}$$

de manera que

$$E = -\frac{\mu k^2}{2l_0^2} (1-e^2) = -\frac{k}{R_1 + R_2} = -\frac{GMm}{R_1 + R_2} \quad (\text{c) 1.5 p})$$

El periodo sale de la tercera ley de Kepler (o por otros medios vale lo mismo)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}} a^{\frac{3}{2}}$$

donde  $a = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$  luego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{(M+m)G}} \left(\frac{1}{2}(R_1 + R_2)\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{d) 1.5 p})$$

2. Como el plano horizontal es liso, conviene usar conservación de  $P_x$  y  $K$ . Las coordenadas de las tres partículas son

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad y_1 = 0 \\ x_2 &= x_3 = x + a \cos \theta, \quad y_2 = a \sin \theta, \quad y_3 = -a \sin \theta \end{aligned}$$

derivamos para obtener componentes de velocidades

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}, \quad \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_3 = \dot{x} - a\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y}_2 = a\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_3 = -a\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

de aquí las rapidezces son

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x} \\ v_2 &= v_3 = \sqrt{(\dot{x} - a\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (a\dot{\theta} \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}^2 - 2a\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + a^2\dot{\theta}^2} \end{aligned}$$

las cantidades conservadas son

$$\begin{aligned} P_x &= m\dot{x} + 2m(\dot{x} - a\dot{\theta} \sin \theta) = 2mV_0 \\ K &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2 \times \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2a\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + a^2\dot{\theta}^2) = mV_0^2 \end{aligned}$$

reduciendo

$$\begin{aligned} 3\dot{x} - 2a\dot{\theta} \sin \theta &= 2V_0 \\ \frac{3}{2}\dot{x}^2 - 2a\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + a^2\dot{\theta}^2 &= V_0^2 \end{aligned}$$

de donde se despejan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2}{3}V_0 - \frac{2 \sin \theta}{3\sqrt{3 - 2 \sin^2 \theta}} V_0 \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{\sqrt{3 - 2 \sin^2 \theta}} \frac{V_0}{a} \quad (\text{a) 2 p}) \end{aligned}$$

Para la tensión podemos escribir (2ª ley)

$$\begin{aligned} 2T \cos \theta &= m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \frac{d\dot{x}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= m 2 \cos \theta \frac{V_0}{(3 - 2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \sin^2 \theta}} \frac{V_0}{a} \Rightarrow \\ T &= \frac{1}{(3 - 2 \sin^2 \theta)^2} m \frac{V_0^2}{a} \quad (\text{b) 2 p}) \end{aligned}$$

Justo antes que choquen ( $\theta = 0$ )

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x} = \frac{2}{3}V_0, \quad \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_3 = \frac{2}{3}V_0, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}V_0, \\ y_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}V_0\end{aligned}\tag{c) 2 p}$$

3. Tenemos, para el eje  $OX$  horizontal

$$F = m \frac{dv}{dt} - (u - v) \frac{dm}{dt}$$

donde

$$\begin{aligned}m &= 3000 - 20t, \quad t \leq 75 \text{ s} \\ u - v &= -1000 \\ F &= 0\end{aligned}$$

reordenando y dividiendo por  $m$

$$dv = (u - v) \frac{dm}{m}$$

que se puede integrar entre  $0 \rightarrow t$

$$\begin{aligned}v(t) &= (-1000) \ln \frac{3000 - 20t}{3000} \\ &= 1000 \ln \frac{150}{150 - t}\end{aligned}$$

por condición  $v = 100$ , debemos resolver

$$\begin{aligned}1000 \ln \frac{150}{150 - t} &= 100 \\ \ln \frac{150}{150 - t} &= \frac{1}{10} \\ \frac{150}{150 - t} &= e^{1/10} \\ t = 150 \frac{e^{1/10} - 1}{e^{1/10}} &= 14.274 \text{ s}\end{aligned}\tag{a) 2 p}$$

El cohete alcanza su máxima velocidad cuando deja de acelerar, es decir cuando se agota el combustible esto es

$$t = 75 \text{ s}$$

luego

$$v_{\max} = 1000 \ln \frac{150}{150 - 75} = 1000 \ln 2 = 693.147 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{b) 2 p})$$

la distancia recorrida requiere de integra de nuevo

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t 1000 \ln \frac{150}{150 - t} dt$$

basta evaluar a los  $t = 75 \text{ s}$  resultando

$$\begin{aligned} x &= 1000 \int_0^{75} \ln \frac{150}{150 - t} dt \\ &= 75\,000 - 75\,000 \ln 2 = 23013.961 \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{c) 2 p})$$