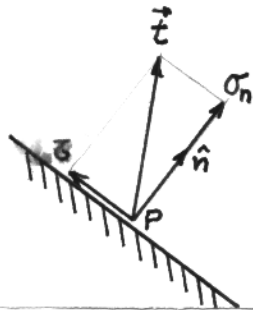


## CAPÍTULO 6

### ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS EN EL PLANO

#### 6.1 Estado de esfuerzos en un punto. Esfuerzo normal y de corte

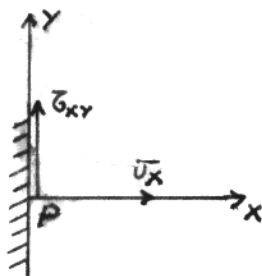
Conocer el estado de esfuerzos en un punto  $P$  consiste en conocer el vector esfuerzo que sobre todo plano que pase por ese punto. En la figura 1 se muestra el vector esfuerzo  $\vec{t}$  en un punto  $P$ , sobre un plano de normal  $\vec{n}$ ; es útil descomponer este vector en una componente normal  $\sigma_n$  y en una de corte  $\tau$



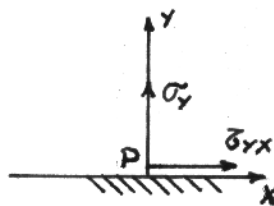
El cálculo del vector  $\vec{t}$ , o de sus componentes  $\sigma_n$  y  $\tau$  es sencillo, contrariamente a lo que a priori pudiera pensarse. Se demostrará que si se conoce el vector esfuerzo sobre dos planos perpendiculares entre sí, se puede calcular el esfuerzo sobre todo plano que pase por el punto.

Figura 1.

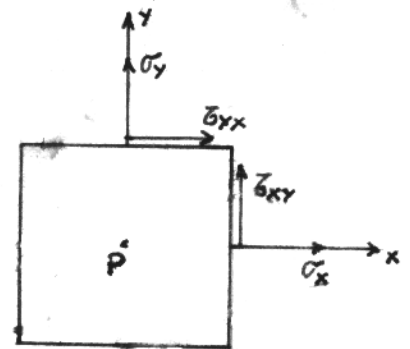
Supongamos entonces que se conoce el vector esfuerzo en dos planos perpendiculares entre sí y coloquemos el sistema de referencia  $(x, y)$  orientado según las normales de estos planos, como se indica en la figura 2a y 2b. Una representación usual consiste en colocar estos dos planos en una misma figura, como se muestra en la figura 2c.



(a)



(b)



(c)

Figura 2

$\sigma_x$  corresponde al esfuerzo normal sobre el plano de normal  $x$

$\sigma_y$  corresponde al esfuerzo normal sobre el plano de normal  $y$

$\tau_{xy}$  corresponde al esfuerzo de corte en la dirección  $y$ , sobre el plano de normal  $x$

$\tau_{yx}$  corresponde al esfuerzo de corte en la dirección  $x$ , sobre el plano de normal  $y$ . No hay que olvidar que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Consideremos un plano que forma un ángulo  $\theta$  con el plano vertical y formemos un triángulo infinitesimal, de espesor unitario, con los planos de esfuerzos conocidos que pasan por  $P$ , como se muestra en la figura 3.

Sea  $dA$  el área del plano AB

Entonces

$dA \sin \theta$  es el área de la cara PA

$dA \cos \theta$  es el área de la cara PB

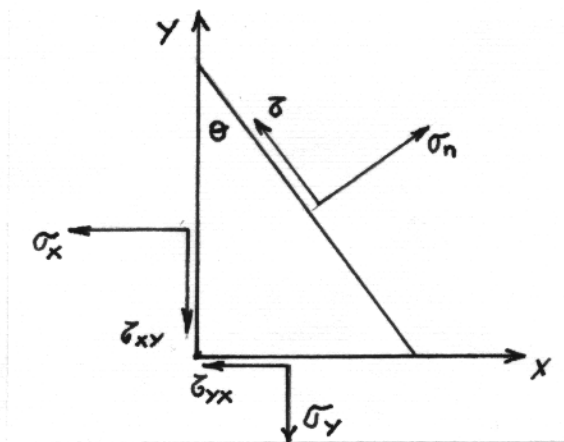


Figura 3.

Al establecer el equilibrio de fuerzas en la dirección normal al plano se obtiene

$$\sigma_n dA = \sigma_x dA \cos \theta \cos \theta + \sigma_y dA \sin \theta \sin \theta + \tau_{xy} dA \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} dA \sin \theta \cos \theta$$

ó

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

Al reemplazar en (1) las identidades trigonométricas

$$\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta) / 2$$

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta) / 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = (\sin 2\theta) / 2$$

se llega a

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

Del mismo modo, al establecer el equilibrio de fuerzas en la dirección tangente al plano AB se obtiene

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

Las expresiones (2) y (3) permiten calcular la componente normal y de corte sobre un plano cualquiera que forma un ángulo  $\theta$  con la vertical, siempre que se conozcan las componentes del esfuerzo en dos planos perpendiculares, es decir,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$

## 6.2 Esfuerzos principales

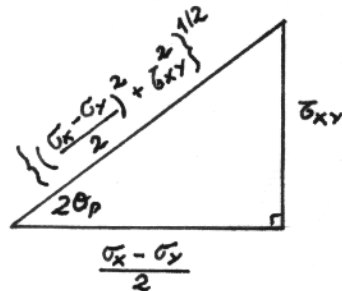
Para encontrar en qué planos se producen los esfuerzos normales extremos, caracterizados por  $\theta_p$ , hay que derivar la expresión (2) e igualar a cero. Se obtiene

$$\frac{d\sigma_x}{d\Theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\Theta_p + \tau_{xy} \cos 2\Theta_p = 0$$

de donde resulta

$$\operatorname{tg} 2\Theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (4)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones  $\theta_p$  y  $\theta_p + 90^\circ$ . Los planos definidos por estos ángulos se llaman **planos principales** y las direcciones definidas por sus normales, **direcciones principales**. Hay en consecuencia dos planos principales (perpendiculares entre sí) y dos direcciones principales (perpendiculares entre sí). Con ayuda de la figura 4 se deduce fácilmente que



$$\sin 2\Theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (5)$$

$$\cos 2\Theta_p = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (6)$$

Figura 4.

Al reemplazar (5) y (6) en (2), se obtienen los esfuerzos normales sobre los planos principales. Estos esfuerzos, llamados **esfuerzos principales**, son

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8)$$

Reemplazando (5) y (6) en (3), se obtienen los esfuerzos de corte en los planos principales. Se obtiene  $\tau = 0$ , es decir, el esfuerzo de corte es nulo en los planos principales.

### 6.3 Esfuerzos de corte máximo

Para encontrar aquellos planos, caracterizados por  $\theta_c$ , donde el esfuerzo de corte toma un valor extremo, se procede de la misma manera. Derivando la expresión (3) e igualando a cero se obtiene

$$\operatorname{tg} 2\Theta_c = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (9)$$

De esta última relación se deduce que hay dos planos de corte máximos (perpendiculares entre sí), definidos por  $\theta_p$  y  $\theta_p + 90^\circ$ , y dos direcciones de corte máximo (también perpendiculares entre sí)

Conviene recordar que si dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  verifican la relación

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 / \operatorname{tg} \beta \quad (10)$$

los ángulos difieren en  $90^\circ$ . Al comparar las relaciones (4) y (9) comprobamos que los ángulos  $2\theta_p$  y  $2\theta_c$  cumplen la relación (10), lo que significa que  $\theta_p$  y  $\theta_c$  difieren en  $45^\circ$  ó  $135^\circ$ .

Calculando  $\operatorname{sen} 2\theta_c$  y  $\operatorname{cos} 2\theta_c$  a partir de la relación (9) y reemplazando en (3) se obtienen los valores extremos de los esfuerzos de corte. Resulta

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11)$$

o bien

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (12)$$

Para obtener el valor del esfuerzo normal en los planos de corte máximo hay que reemplazar  $\operatorname{sen} 2\theta_c$  y  $\operatorname{cos} 2\theta_c$  en la expresión (2). Se obtiene

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_m \quad (13)$$

es decir, el esfuerzo normal medio  $\sigma_m$

#### 6.4 Círculo de Mohr

Consideremos nuevamente las relaciones (2) y (3)

$$\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\Theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\Theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\Theta + \tau_{xy} \cos 2\Theta$$

donde el término  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  de la relación (2) se ha pasado al lado de la izquierda. Al elevar cada una de estas dos expresiones al cuadrado y sumando miembro a miembro, resulta

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (14)$$

En un plano de esfuerzos  $\tau - \sigma_n$ , la relación (14) representa un círculo, cuyas características son las siguientes:

➤ El centro tiene abscisa  $(\sigma_x + \sigma_y)/2 = \sigma_m$  y ordenada 0

➤ El radio del círculo es  $R = \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)/2)^2 + \tau_{xy}^2}$

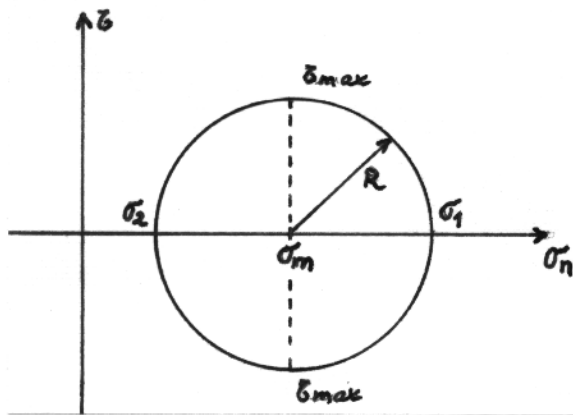


Figura 5

Cada punto de este círculo, llamado Círculo de Mohr, representa el esfuerzo normal y de corte que hay en cualquier plano que pase por el punto P.

En la figura 5 se ha dibujado el círculo de Mohr. Se observa fácilmente que los valores de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\tau_{\max}$  coinciden con los dados por las fórmulas (7), (8) y (11) respectivamente.

Para dibujar el círculo de Mohr se pueden calcular los esfuerzos principales e identificarlos en el eje de  $\sigma_n$ , con lo que se determina un diámetro sobre las abscisas. Hay que destacar que mientras en el plano físico los planos principales están a  $90^\circ$ , en el plano de esfuerzos los puntos correspondientes están a  $180^\circ$ .

Sólo resta identificar cada punto del círculo de Mohr con la orientación del plano físico correspondiente. Es decir, saber a qué plano físico corresponde un determinado punto del círculo de Mohr y viceversa. Para ello hagamos la siguiente construcción:

- Antes que nada adoptemos la siguiente convención de signo:  $\tau$  es positivo si el elemento de área tiende a girar en el mismo sentido del movimiento de los punteros del reloj;  $\tau$  es negativo si el elemento de área tiende a girar en el sentido contrario. Esta situación se ilustra en la figura 6a.
- Identifiquemos sobre el círculo de Mohr los puntos correspondientes a los planos físicos donde se conocen los esfuerzos. Por ejemplo, en la figura 6b los puntos H y V corresponden a las componentes del esfuerzo sobre los planos horizontal y vertical respectivamente, mostrados en la figura 6c. Es muy fácil mostrar que estos puntos constituyen un diámetro.
- Por estos puntos se trazan líneas paralelas a los planos físicos. Es decir, por el punto H una línea horizontal y por el punto V una vertical.
- Estas líneas se cortan sobre el círculo en un punto Q que llamaremos Polo.

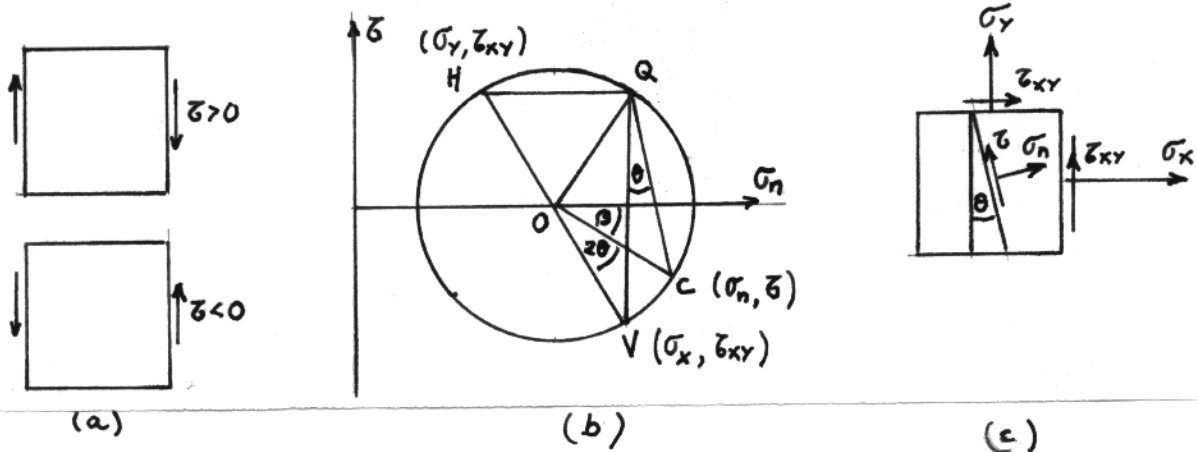


Figura 6.

El Polo tiene la siguiente propiedad: una línea paralela al plano físico trazada por el polo, corta al círculo de Mohr en un punto que representa el estado de esfuerzo de ese plano.

Para demostrar este punto, consideremos un plano que forma un ángulo  $\theta$  con la vertical y tracemos por el polo una línea paralela a ese plano; esta línea corta al círculo en el punto C. Calculemos el valor de  $\sigma_n$  y de  $\tau$  en este punto.

En la figura 6b, tenemos que el ángulo VOC es  $2\theta$ , el ángulo VQC es  $\theta$  y consideremos el ángulo auxiliar  $\beta$ . Para  $\sigma_n$  y  $\tau$  se obtiene

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos \beta \quad (15)$$

$$\tau = R \sin \beta \quad (16)$$

donde R es el radio del círculo. Por otro lado sabemos que

$$\cos(2\theta + \beta) = \cos 2\theta \cos \beta - \sin 2\theta \sin \beta = (\sigma_x - \sigma_y)/(2R) \quad (17)$$

$$\sin(2\theta + \beta) = \sin 2\theta \cos \beta + \cos 2\theta \sin \beta = \tau_{xy} / R \quad (18)$$

Al multiplicar la ecuación (17) por  $\cos 2\theta$  y la (18) por  $\sin 2\theta$  y sumando miembro a miembro los resultados, se encuentra que

$$\cos \beta = \frac{1}{R} \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right) \quad (19)$$

Al reemplazar (19) en (15) se obtiene

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (20)$$

Relación que coincide con la ecuación (2)

Al multiplicar la ecuación (17) por  $\sin 2\theta$  y la (18) por  $\cos 2\theta$  y restando miembro a miembro se encuentra

$$\sin \beta = \left( \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \right) \frac{1}{R} \quad (21)$$

Al reemplazar (21) en (16) se obtiene

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (22)$$

expresión que coincide con la (3).

## 6.5 Caso tridimensional

En el caso tridimensional se puede hacer un análisis semejante al realizado en el caso bidimensional. Por ahora no se hará este análisis; sólo mencionaremos las conclusiones más relevantes:

- El estado de esfuerzos en un punto, es decir, el esfuerzo sobre cualquier plano que pase por el punto queda completamente definido al conocer el esfuerzo sobre tres planos perpendiculares entre sí
- Hay tres direcciones principales (perpendiculares entre sí), tres planos principales y tres esfuerzos principales
- Hay tres direcciones de corte máximo (perpendiculares entre sí), tres planos de corte máximo, y tres esfuerzos de corte máximos relativos, uno de los cuales es el máximo absoluto
- Las direcciones principales forman ángulos de  $45^\circ$  con las direcciones de corte máximo.
- El círculo de Mohr se transforma en un tri-círculo, como el mostrado en la figura 7. La zona achurada que queda entre los círculos representa la zona de esfuerzos admisibles. De la misma figura se observa que el esfuerzo de corte máximo corresponde a la semi-diferencia entre el máximo y el mínimo esfuerzo principal

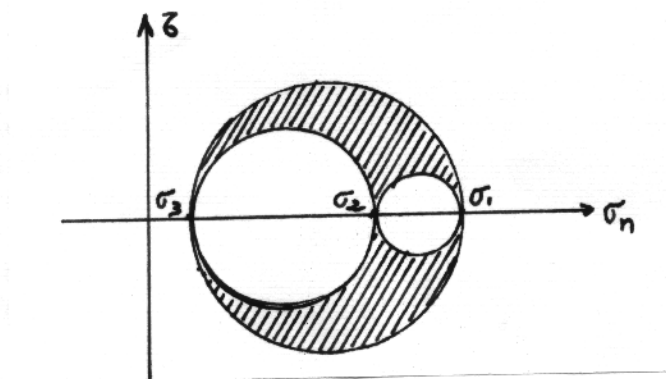


Figura 7.

## 6.6 Caso de las deformaciones

Todo el análisis desarrollado para los esfuerzos se puede repetir para las deformaciones. Se obtienen exactamente las mismas conclusiones, con la única diferencia que hay ahora que considerar la simbología correspondiente a las deformaciones. Vale decir

$\epsilon_x$ , deformación normal sobre el plano de normal  $x$ , en lugar de  $\sigma_x$

$\epsilon_y$ , deformación normal sobre el plano de normal  $y$ , en lugar de  $\sigma_y$

$\gamma_{xy}/2$ , deformación de corte en lugar de  $\tau_{xy}$

Con relación al círculo de Mohr para deformaciones, cabe hacer notar:

- $\gamma_{xy}/2$  se considera positivo si corresponde a un esfuerzo de corte positivo;  $\gamma_{xy}/2$  se considera negativo si corresponde a un esfuerzo de corte negativo.
- en los ejes de las coordenadas se debe considerar  $\gamma/2$  (deformación de corte) y  $\varepsilon$  (deformación normal), como de indica en la figura 8

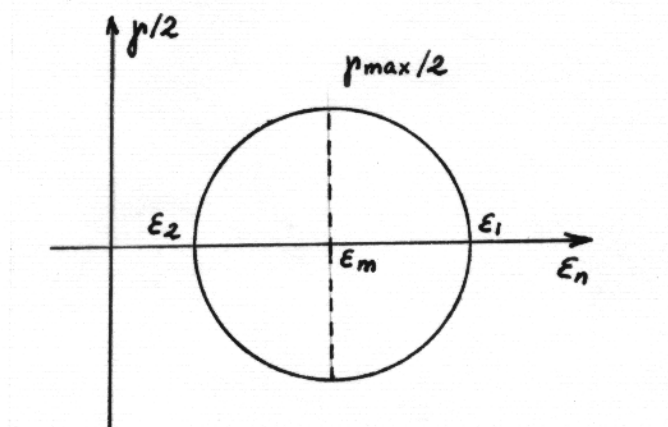


Figura 8

## 6.7 RECIPIENTES CILÍNDRICOS Y ESFÉRICOS

Un caso importante de esfuerzos bidimensionales se encuentra en los recipientes de presión. Aunque hay recipientes de presión en una amplia variedad de formas, aquí únicamente se consideran los recipientes cilíndricos y esféricos de pared delgada, es decir, donde el espesor es muy pequeño comparado con las otras dimensiones. La presión que existe en el interior de un recipiente produce deformaciones de estiramiento en las paredes del recipiente, parecidas a las producidas en las paredes de un globo (salvo la magnitud), como si fueran membranas. De aquí el uso del término *esfuerzos de membrana*.

### 6.7.1 Recipientes cilíndricos

La figura 9 representa un recipiente cilíndrico a presión con los extremos cerrados. Por efecto de la presión interna se producen esfuerzos de tracción circunferenciales  $\sigma_h$  y longitudinales  $\sigma_l$ .

El esfuerzo de membrana  $\sigma_l$  se puede hallar a partir de las condiciones de equilibrio para el diagrama de cuerpo libre de la figura 9c. El equilibrio de fuerzas en la dirección longitudinal establece

$$\sigma_l \cdot 2\pi(r + t/2)t - p\pi r^2 = 0$$

si se desprecia  $t/2$  frente a  $r$ , esta relación se reduce a

$$\sigma_l = \frac{pr}{2t}$$



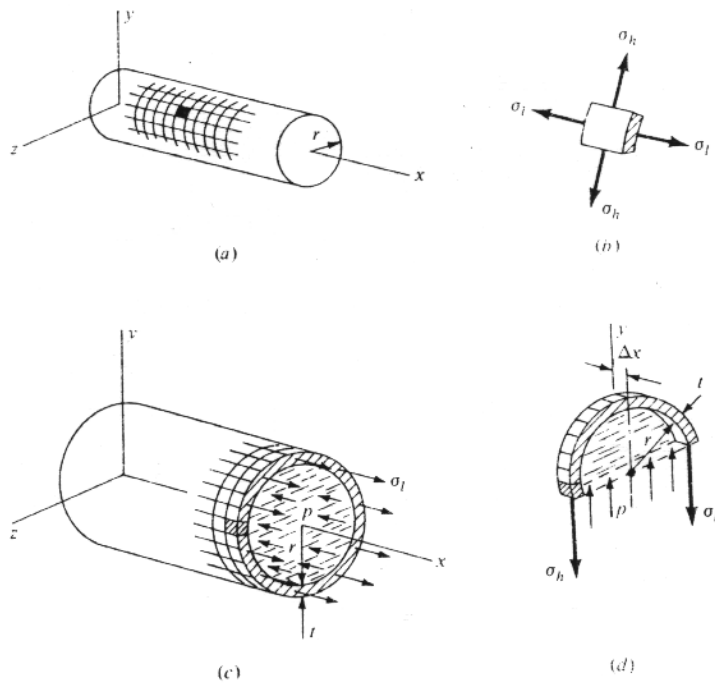


Figura 9.

El esfuerzo de membrana  $\sigma_h$  se puede encontrar al hacer equilibrio del cuerpo libre mostrado en la figura 9d. Se obtiene

$$2\sigma_h t \Delta x - p(2r \Delta x) = 0$$

de donde

$$\sigma_h = \frac{pr}{t}$$

### 6.7.2 Recipientes esféricos

Para el recipiente esférico consideremos el diagrama de cuerpo libre de una semiesfera, como se muestra en la figura 10. Al hacer equilibrio de fuerza se obtiene

$$\sigma_h \cdot 2\pi(r + t/2) - p\pi r^2 = 0$$

de donde

$$\sigma_h = \frac{pr}{2t}$$

En una dirección perpendicular a la anterior la situación es la misma, dada la simetría del recipiente.

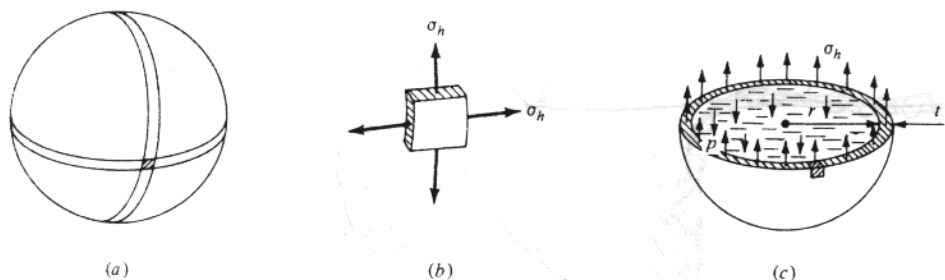


Figura 10.