

ME33A - Mecánica de Fluidos
Pauta Guía Control 3
Semestre Primavera 2006

Problema 1

Traten de observar la metodología del apunte del Profe. Asegúrense de saber qué significa que haya semejanza geométrica, cinemática y/o dinámica.

Problema 4

El problema se resuelve mediante el método de las variables repetidas, el que consta de varios pasos (ver apunte curso):

1. **Determinar variables involucradas.** En este caso las variables están dadas ($V, \rho, l, l_1, l_2, \Delta p, g, \mu, \sigma, K$).
2. **Expresar las variables en términos de sus dimensiones básicas.** Para problemas típicos de mecánica de fluidos, se suelen usar las dimensiones F, L, T o M, L, T . (Para esta pauta se utilizará la segunda combinación, sin embargo el resultado es el mismo si se usa la primera, pueden hacerlo de las dos formas para comprobar sus resultados).

$$\begin{aligned}V &= LT^{-1} \\ \rho &= ML^{-3} \\ l &= L \\ l_1 &= L \\ l_2 &= L \\ \Delta p &= ML^{-1}T^{-2} \\ g &= LT^{-2} \\ \mu &= ML^{-1}T^{-1} \\ \sigma &= ML^{-1}T^{-2} \\ K &= ML^{-1}T^{-2}\end{aligned}$$

3. **Determinar el número de grupos adimensionales.** Por el Teorema II de Buckingham, la cantidad de grupos adimensionales será: $n = n_{variables} - n_{dimensiones\ básicas} = 10 - 3 = 7$.
4. **Seleccionar un número de variables repetidas igual al número de dimensiones básicas involucradas.** En este caso las dimensiones básicas son 3 (M, L, T), y las variables a repetir están dadas en el enunciado (V, ρ, l).
5. **Formar los grupos adimensionales.** Se forman multiplicando las variables no repetidas con las repetidas elevadas a exponentes por determinar:

$$\Pi_1 = l_1 V^a \rho^b l^c$$

$$\Pi_2 = l_2 V^a \rho^b l^c$$

$$\Pi_3 = \Delta p V^a \rho^b l^c$$

$$\Pi_4 = g V^a \rho^b l^c$$

$$\Pi_5 = \mu V^a \rho^b l^c$$

$$\Pi_6 = \sigma V^a \rho^b l^c$$

$$\Pi_7 = K V^a \rho^b l^c$$

6. **Expresar los grupos adimensionales en función de las dimensiones básicas y resolver el sistema de ecuaciones asociado.**

$$\Pi_1 = L(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

$$\Pi_2 = L(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

$$\Pi_3 = ML^{-1}T^{-2}(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

$$\Pi_4 = LT^{-2}(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

$$\Pi_5 = ML^{-1}T^{-1}(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

$$\Pi_6 = ML^{-1}T^{-2}(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

$$\Pi_7 = ML^{-1}T^{-2}(LT^{-1})^a(ML^{-3})^bL^c$$

Resolviendo cada sistema de manera que los grupos sean adimensionales, se obtienen los siguientes grupos:

$$\Pi_1 = l_1 V^0 \rho^0 l^{-1} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{l_1}{l} \quad (1)$$

$$\Pi_2 = l_2 V^0 \rho^0 l^{-1} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{l_2}{l} \quad (2)$$

$$\Pi_3 = \Delta p V^{-2} \rho^{1/3} l^4 \Rightarrow \Pi_3 = \frac{\Delta p \rho^{1/3} l^4}{V^2} \quad (3)$$

$$\Pi_4 = g V^{-2} \rho^0 l^1 \Rightarrow \Pi_4 = \frac{gl}{V^2} \quad (4)$$

$$\Pi_5 = \mu V^{-1} \rho^{-1} l^{-1} \Rightarrow \Pi_5 = \frac{\mu}{V \rho l} \quad (5)$$

$$\Pi_6 = \sigma V^{-2} \rho^{1/3} l^4 \Rightarrow \Pi_6 = \frac{\sigma \rho^{1/3} l^4}{V^2} \quad (6)$$

$$\Pi_7 = K V^{-2} \rho^{1/3} l^4 \Rightarrow \Pi_7 = \frac{K \rho^{1/3} l^4}{V^2} \quad (7)$$

7. **Verificar que los grupos obtenidos sean adimensionales.** (Propuesto, en caso de haber errores avisen en foro).
8. **Formar relación funcional entre grupos.** Como se pide determinar Δp , se deja el grupo adimensional Π_3 al lado izquierdo de la ecuación:

$$\Pi_3 = \phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7) \quad (8)$$

Luego:

$$\frac{\Delta p \rho^{1/3} l^4}{V^2} = \phi\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}, \frac{gl}{V^2}, \frac{\mu}{V \rho l}, \frac{\sigma \rho^{1/3} l^4}{V^2}, \frac{K \rho^{1/3} l^4}{V^2}\right) \quad (9)$$

Problema 3

El factor de fricción de la tubería es $f = 0,0306$.

Problema 7

Se asume en primer lugar que el flujo de la tubería (2) va hacia afuera de la reserva B . Esto será chequeado posteriormente. Por continuidad: $Q_1 + Q_2 = Q_3$, pero como los diámetros de las tuberías son iguales, la ecuación

queda como

$$V_1 + V_2 = V_3 \quad (10)$$

La ecuación de energía para el fluido que fluye de A a C en las tuberías (1) y (3) se puede escribir como

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} \quad (11)$$

Sin embargo, $p_A = p_C = V_A = V_C = z_C = 0$, con lo que se obtiene

$$z_A = f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} \quad (12)$$

Para las condiciones dadas del problema, la ecuación anterior queda como

$$100[ft] = \frac{0,02}{2(32,2[ft/s^2])} \frac{1}{1[ft]} [(1000[ft])V_1^2 + (400[ft])V_3^2] \quad (13)$$

$$\Rightarrow 322 = V_1^2 + 0,4V_3^2 \quad (14)$$

Donde V_1 y V_2 están en [ft/s]. Análogamente, la ecuación de energía para el fluido que fluye de B a C es

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + f_2 \frac{\ell_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} \quad (15)$$

$$\Rightarrow z_B = f_2 \frac{\ell_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} \quad (16)$$

Para las condiciones del problema:

$$\Rightarrow 64,4 = 0,5V_2^2 + 0,4V_3^2 \quad (17)$$

Las ecuaciones 17, 18 y 19 describen el flujo. Sin embargo, dada la suposición hecha en un principio (flujo desde B), el sistema no tiene solución real (suponga un valor positivo de V_1 , calcule V_3 de la ecuación 18 y V_2 de la ecuación 19; luego verifique que estos valores no satisfacen la ecuación 17 sin importar el valor de V_1 asumido). Luego, la suposición inicial debe ser incorrecta.

Para obtener la solución, asuma ahora que el flujo va desde la reserva A hacia las reservas B y C . Para este caso, la ecuación de continuidad es $Q_1 = Q_2 + Q_3$, o

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad (18)$$

Aplicando la ecuación de energía entre los puntos A , B y C se obtiene

$$z_A = z_B + f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{\ell_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} \quad (19)$$

y

$$z_A = z_C + f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} \quad (20)$$

Que con los datos dados se convierten en

$$258 = V_1^2 + 0,5V_2^2 \quad (21)$$

y

$$322 = V_1^2 + 0,4V_3^2 \quad (22)$$

Las ecuaciones 20, 21 y 22 se pueden resolver como sigue. Restando la ecuación 5 de la 6 se obtiene

$$V_3 = \sqrt{160 + 1,25V_2^2} \quad (23)$$

Con lo que la ecuación 21 puede ser escrita como

$$258 = (V_2 + V_3)^2 + 0,5V_2^2 = \left(V_2 + \sqrt{160 + 1,25V_2^2} \right)^2 + 0,5V_2^2 \quad (24)$$

o

$$2V_2\sqrt{160 + 1,25V_2^2} = 98 - 2,75V_2^2 \quad (25)$$

Que elevando al cuadrado ambos lados se puede escribir como

$$V_2^4 - 460V_2^2 + 3748 = 0 \quad (26)$$

Utilizando la fórmula cuadrática, se puede resolver fácilmente para V_2^2 para obtener $V_2^2 = 452$ o $V_2^2 = 8,3$. Con esto los resultados posibles son $V_2 = 21,3$ [ft/s] o $V_2 = 2,88$ [ft/s]. Sin embargo, el valor $V_2 = 21,3$ [ft/s] no es una solución de las ecuaciones originales, sino una solución extra inducida al elevar al cuadrado la ecuación 23 (reemplazando $V_2 = 21,3$, la ecuación 23 se convierte en $1140 = -1140$). Entonces, $V_2 = 2,88$ [ft/s], y de la ecuación 21, $V_1 = 15,9$ [ft/s]. Los flujos correspondientes son

$$Q_1 = A_1V_1 = \frac{\pi}{4}D_1^2V_1 = 12,5 \text{ [ft}^3\text{/s]} \text{ desde } A$$

$$Q_2 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4}D_2^2V_2 = 2,26 \text{ [ft}^3\text{/s]} \text{ hacia } B$$

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 10,2 \text{ [ft}^3\text{/s]} \text{ hacia } C$$