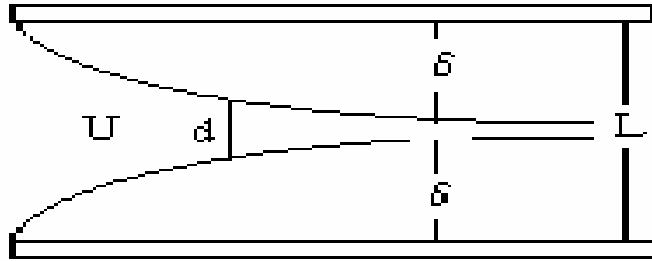


Problema 1

Se tiene un fluido de *densidad* ρ y *viscosidad cinemática* ν conocidas. El fluido fluye a una velocidad U (también conocida) y se encuentra con un par de placas delgadas muy largas en $x = 0$. Al chocar con las placas, los efectos viscosos del fluido forman la llamada *capa límite hidrodinámica* (ver figura), en la cual la velocidad del fluido varía según y , de manera tal que la velocidad u (velocidad del fluido dentro de la capa límite) es igual a cero en el borde de las placas e igual a U en el borde de las capas límite.



Se pide encontrar el espesor d por el cual pasa el flujo en función de x .

Para esto, suponga un perfil de velocidad u cúbico, i.e. $u_1 = a_1 \cdot y^3 + b_1 \cdot y^2 + c_1 \cdot y + d_1$;
 $u_2 = a_2 \cdot y^3 + b_2 \cdot y^2 + c_2 \cdot y + d_2$ (a_1, b_1, \dots, d_2 son constantes a determinar).

Además, suponga que la variación de velocidad en el borde de la capa límite es nula ($\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\delta} = 0$), y que

también $\left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_{y=\delta} = 0$.

Se sabe también que la capa límite cumple la siguiente relación:

$$-\nu \cdot \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho \cdot (u^2 - U \cdot u) dy \right)$$

Hint: - Identifique las condiciones de borde que se dan en el enunciado.

- Las constantes las puede obtener en función de δ

Solución

Por simetría, basta con encontrar el perfil de velocidades u_1

$$u_1 = a_1 \cdot y^3 + b_1 \cdot y^2 + c_1 \cdot y + d$$

$$\Rightarrow d = 0 \quad (u(0) = 0)$$

$$U = a_1 \cdot \delta^3 + b_1 \cdot \delta^2 + c_1 \cdot \delta \quad (u(\delta) = U) \quad (1)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\delta} = 0 \Rightarrow 3 \cdot a_1 \cdot \delta^2 + 2 \cdot b_1 \cdot \delta + c_1 = 0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_{y=\delta} = 0 \Rightarrow 6 \cdot a_1 \cdot \delta + 2 \cdot b_1 = 0 \quad (3)$$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\text{De (3): } 6 \cdot a_1 \cdot \delta + 2 \cdot b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -3 \cdot a_1 \cdot \delta$$

Reemplazando b_1 en (2):

$$3 \cdot a_1 \cdot \delta^2 + 2 \cdot (-3 \cdot a_1 \cdot \delta) \cdot \delta + c_1 = 0 \Rightarrow 3 \cdot a_1 \cdot \delta^2 + 6 \cdot a_1 \cdot \delta^2 + c_1 = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cdot a_1 \cdot \delta^2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -9 \cdot a_1 \cdot \delta^2$$

Luego, reemplazando b_1 y c_1 en (1):

$$U = a_1 \cdot \delta^3 + (-3 \cdot a_1 \cdot \delta) \cdot \delta^2 + (-9 \cdot a_1 \cdot \delta^2) \cdot \delta \Rightarrow U = a_1 \cdot \delta^3 + 3 \cdot a_1 \cdot \delta^3 - 9 \cdot a_1 \cdot \delta^3$$

$$\Rightarrow U = -5 \cdot a_1 \cdot \delta^3 \Rightarrow a_1 = \frac{-U}{5 \cdot \delta^3}$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{-3 \cdot U}{5 \cdot \delta^2}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{9 \cdot U}{5 \cdot \delta}$$

Con esto, el perfil de velocidades es:

$$u = -\frac{U}{5 \cdot \delta^3} \cdot y^3 - \frac{3 \cdot U}{5 \cdot \delta^2} \cdot y^2 + \frac{9 \cdot U}{5 \cdot \delta} \cdot y$$

Ahora podemos reemplazar en la ecuación de capa límite y desarrollar:

$$-\nu \cdot \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho \cdot (u^2 - U \cdot u) dy \right)$$

$$\begin{aligned}
-v \cdot \left(\frac{9 \cdot U}{5 \cdot \delta} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho \cdot \left(\left(-\frac{U}{5 \cdot \delta^3} \cdot y^3 - \frac{3 \cdot U}{5 \cdot \delta^2} \cdot y^2 + \frac{9 \cdot U}{5 \cdot \delta} \cdot y \right)^2 + \frac{U^2}{5 \cdot \delta^3} \cdot y^3 + \frac{3 \cdot U^2}{5 \cdot \delta^2} \cdot y^2 - \frac{9 \cdot U^2}{5 \cdot \delta} \cdot y \right) dy \right) \\
\Rightarrow \frac{-9 \cdot v \cdot U}{5 \cdot \delta} &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho \cdot \frac{U^2}{25} \left(\frac{1}{\delta^6} \cdot y^6 - \frac{9}{\delta^4} \cdot y^4 + \frac{96}{\delta^2} \cdot y^2 + \frac{6}{\delta^5} \cdot y^5 - \frac{49}{\delta^3} \cdot y^3 - \frac{45}{\delta} \cdot y \right) dy \right) \\
\Rightarrow \frac{-9 \cdot v}{\delta} &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \frac{\rho \cdot U}{5} \cdot \left(\frac{1}{\delta^6} \cdot y^6 - \frac{9}{\delta^4} \cdot y^4 + \frac{96}{\delta^2} \cdot y^2 + \frac{6}{\delta^5} \cdot y^5 - \frac{49}{\delta^3} \cdot y^3 - \frac{45}{\delta} \cdot y \right) dy \right) \\
\Rightarrow \frac{-9 \cdot v}{\delta} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho \cdot U}{5} \cdot \left(\frac{1}{\delta^6} \cdot \frac{\delta^7}{7} - \frac{9}{\delta^4} \cdot \frac{\delta^5}{5} + \frac{96}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^3}{3} + \frac{6}{\delta^5} \cdot \frac{\delta^6}{6} - \frac{49}{\delta^3} \cdot \frac{\delta^4}{4} - \frac{45}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{2} \right) \right) \\
\Rightarrow \frac{-9 \cdot v}{\delta} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho \cdot U}{5} \cdot \left(\frac{\delta}{7} - 9 \cdot \frac{\delta}{5} + 96 \cdot \frac{\delta}{3} + 6 \cdot \frac{\delta}{6} - 49 \cdot \frac{\delta}{4} - 45 \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right) \\
\Rightarrow \frac{-9 \cdot v}{\delta} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho \cdot U}{5} \cdot \left(\frac{-954 \cdot \delta}{280} \right) \right) \\
\Rightarrow \frac{-9 \cdot v}{\delta} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho \cdot U}{5} \cdot \left(\frac{-477 \cdot \delta}{140} \right) \right) \\
\Rightarrow \frac{-v}{\delta} &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{\rho \cdot U}{5} \cdot \frac{53 \cdot \delta}{140} \right) \\
\Rightarrow \frac{-v}{\delta} &= -\frac{53 \cdot \rho \cdot U}{700} \frac{d\delta}{dx} \\
\Rightarrow \frac{700 \cdot v}{53 \cdot \rho \cdot U \cdot \delta} &= \frac{d\delta}{dx} \\
\Rightarrow \frac{700 \cdot v}{53 \cdot \rho \cdot U} dx &= \delta d\delta \\
\Rightarrow \frac{700 \cdot v}{53 \cdot \rho \cdot U} \cdot x &= \frac{\delta^2}{2} \\
\Rightarrow \delta &= \sqrt{\frac{1400 \cdot v}{53 \cdot \rho \cdot U} \cdot x}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
d &= L - 2 \cdot \delta \\
\Rightarrow d &= L - 2 \cdot \sqrt{\frac{1400 \cdot v}{53 \cdot \rho \cdot U} \cdot x}
\end{aligned}$$